Singulärwertzerlegung

Satz und Definition

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ und $k = \min\{m,n\}$. Dann existieren unitäre Matrizen $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sodass die Matrix $\Sigma = UAV$ von der Form

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{oder} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ist (Diagonalmatrix mit derselben Anzahl Zeilen/Spalten wie A) und wobei s_i **nicht negative reelle Zahlen sind**. Die Zerlegung $A = U\Sigma V$ wird Singulärwertzerlegung von A genannt. Die Zahlen s_1, ... , s_k heißen Singulärwerte von A.

Algorithmus: Singulärwertzerlegung berechnen für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$

Es sei $k = \min\{m,n\}$.

1. **Singulärwerte und Matrix Σ:** Berechne die Eigenwerte λ_i von $M := A\cdot A$ und nummeriere diese, sodass $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ gilt (Hierbei werden die Eigenwerte so oft genannt, wie es die algebraische Vielfachheit vorgibt).
   Die Singulärwerte von A sind die Wurzeln der ersten k Eigenwerte. Es gilt:
   $s_1 = \sqrt{\lambda_1}$, ... , $s_k = \sqrt{\lambda_k}$.
   Σ ist eine $(m \times n)$-Matrix mit s_1, ... , s_k auf der Diagonalen und sonst Nullen.

2. **Matrix V:** Bestimme zu jedem Eigenwert λ_i von $M := A\cdot A$ einen Eigenvektor v_i, sodass $(v_1, \dots, v_n)$ eine orthonormale Familie ist.
   Setze $V = (v_1|\cdots|v_n)$
   Hinweis: Eigenvektoren verschiedener Eigenwerte sind automatisch orthogonal. Die Eigenvektoren identischer Eigenwerte kann man mit dem Gram-Schmidt-Verfahren orthonormalisieren.

3. **Matrix U:** Es seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_l > 0$ alle positiven Eigenwerte unter λ_1, ... , λ_k.
   Berechne für alle $i \in \{1, \dots, l\}$ den Vektor: $u_i = \frac{1}{s_i}\cdot A \cdot v_i$
   Ergänze $(u_1, \dots, u_l)$ zu einer Orthonormalbasis $(u_1, \dots, u_m)$ von $\mathbb{C}^m$. Setze danach
   $U = (u_1|\cdots|u_m)$

Beispielaufgabe

Wir bestimmen eine Singulärwertzerlegung von $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$; $k = \min\{m,n\} = 2$

Matrix Σ

EW: M

Matrix Σ: $M = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & -4 & 50 \\ 0 & -4 & 100 & 46 \\ 0 & 50 & 46 & 73 \end{pmatrix}$ M hat die Eigenwerte 0 (zweifach), 81 (einfach) und 144 (einfach). Wir sortieren: $\lambda_1 = 144$, $\lambda_2 = 81$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Die Singulärwerte sind daher $s_1 = 12$ sowie $s_2 = 9$.

EV: M

Matrix V: Eigenräume sind $V_{144} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_{81} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $V_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Matrix V

Orthonormale Eigenvektoren: $v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Matrix U

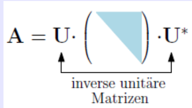
☺ – ☹

Erhalte $\Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 0 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$ und $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Schur-Zerlegung

Satz und Definition

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann existiert eine Schur-Zerlegung, d.h. eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit: $U^*AU = R$ bzw. $A = URU^*$



Algorithmus: Schur-Zerlegung

1. Setze $A_0 = A$.
   - Bestimme einen Eigenwert λ_1 und den Eigenvektor v_1 von A_0 mit $||v_1||_2 = 1$.
   - Ergänze v_1 zu einer Orthonormalbasis $(v_1, w_{2,1}, \cdots, w_{n,1})$ von $\mathbb{C}^n$

$$U_1 = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & w_{2,1} & \cdots & w_{n,1} \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}.$$

   - Berechne $U_1{}^* A_0 U_1$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

2. Nehme A_1 aus 1.
   - Bestimme den Eigenwert λ_2 und den Eigenvektor v_2 von A_1 mit $||v_2||_2 = 1$.
   - Ergänze v_2 zu einer Orthonormalbasis $(v_2, w_{3,2}, \cdots, w_{n,2})$ von $\mathbb{C}^{n-1}$

$$U_2 = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_2 & w_{3,2} & \cdots & w_{n,2} \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}.$$

   - Berechne $U_2{}^* A_0 U_2$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

3. Bestimme $A_3, \cdots, A_{n-1}$ und $U_3, \cdots, U_{n-1}$ mit äquivalenten Schritten und berechne schließlich U:

$$U = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & U_3 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & U_{n-1} \end{array}\right).$$

Beispielaufgabe

Wir bestimmen eine Schur-Zerlegung für $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$:

EW: A_0

1. Ein Eigenwert von A ist $\lambda_1 = 3$. Der Eigenraum von λ_1 berechnet sich durch das LGS:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \cdots$ Gauß $\cdots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Rückwärtssubstitution: $x_3 \in \mathbb{R}$ frei, $x_2 = 0.5x_3$, $x_1 = -x_3$
Eigenraum: $\left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0.5x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, norm. Eigenvektor: $v_1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.
Nun ergänzt man diesen Vektor zu einer ONB von $\mathbb{R}^3$ und stellt die die Matrix U_1 auf:
$U_1 := \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$; Es gilt nun: $U_1^* \cdot A \cdot U_1 = \begin{pmatrix} 3 & -15/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 9/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 9/2 \end{pmatrix}$

Matrix U_1

EW: A_1

2. $A_1 = \begin{pmatrix} 9/2 & 3/2 \\ 3/2 & 9/2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 3 und 6. Wir wählen $\lambda_2 = 3$. Eigenraum: $\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, norm. Eigenvektor $v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer ONB von $\mathbb{R}^2$ ergänzen $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Für $U_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $U_2^* \cdot A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Matrix U_2

Erklärung

3. Mit dem Algorithmus erhalten wir nun: $U = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $R = U^*AU = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.