Numerik partieller Differentialgleichungen
Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

5. Übungsblatt (erschienen am 13.01.2021)

Auf diesem Übungsblatt sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitzgebiet für das eine reguläre Triangulierung $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$ existiert, d.h. die Dreiecke T_i sind offen, paarweise disjunkt, $\bigcup_{i=1}^N \overline{T_i} = \overline{\Omega}$ und $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$ ist (für $i \neq j$) entweder leer, oder eine gemeinsame Ecke, oder eine gemeinsame Kante von T_i und T_j. Weiterhin seien x_i, $i = 1, \dots, m$ die Knoten des Gitters. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass zu einer solchen Triangulierung Funktionen $\Lambda_i : \Omega \to \mathbb{R}$ existieren mit

$$\Lambda_i \text{ ist stetig, } \Lambda_i\,|_{T_k} \text{ ist linear für } k = 1, \dots N \text{ und } \Lambda_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, m.$$

Diese sogenannten *Hutfunktionen* bilden offenbar eine Basis des *Raumes der stetigen und stückweise linearen Funktionen*

$$V^{\mathcal{T}} := \operatorname{span}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m).$$

Aufgabe 5.1 (Schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Die Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ erfülle $v_i := v\,|_{T_i} \in C^1(\overline{T_i})$ für alle $i = 1, \dots N$ und $v \in C^0(\overline{\Omega})$. Beweisen Sie, dass (im distributionellen Sinne) $\nabla v = \sum_{i=1}^N \nabla v_i \chi_{T_i}$ gilt und folgern Sie $v \in H^1(\Omega)$.

Hinweis: Bemerkung 2.45

Aufgabe 5.2 (Votieraufgabe)
Für $u, v \in V^{\mathcal{T}}$ und $K \subset \Omega$ seien die Bilinearform und die Linearform

$$b(u, v) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x \qquad f(v) := \int_\Omega \chi_K(x) v(x)\,\mathrm{d}x$$

gegeben. Für zwei Hutfunktionen Λ_i, Λ_j gilt dann offenbar

$$b(\Lambda_i, \Lambda_j) = \int_\Omega \nabla\Lambda_i \cdot \nabla\Lambda_j\,\mathrm{d}x = \sum_{T_k \in \mathcal{T}} \int_{T_k} \nabla\Lambda_i \cdot \nabla\Lambda_j\,\mathrm{d}x =: \sum_{T_k \in \mathcal{T}} b_{T_k}(\Lambda_i, \Lambda_j)$$

und genauso gilt $f(\Lambda_i) = \sum_{T_k \in \mathcal{T}} f_{T_k}(\Lambda_i)$. Weiterhin sei $D_T \in \mathbb{R}^{N,3}$ die Matrix, welche in der j-ten Zeile die Indizes der drei Gitterpunkte enthält, welche die Ecken von T_j bilden (vgl. Übungsaufgabe 2.4).

Sei nun $T_k \in \mathcal{T}$ ein beliebiges Dreieck und bezeichne $a := D_T(k, 1)$, $b := D_T(k, 2)$ und $c := D_T(k, 3)$, dann sind Λ_a, Λ_b und Λ_c gerade die zu T_k gehörigen Hutfunktionen. Bestimmen Sie nun die *Elementsteifigkeitsmatrix*

$$B_{T_k} := \begin{pmatrix} b_{T_k}(\Lambda_a, \Lambda_a) & b_{T_k}(\Lambda_a, \Lambda_b) & b_{T_k}(\Lambda_a, \Lambda_c) \\ b_{T_k}(\Lambda_b, \Lambda_a) & b_{T_k}(\Lambda_b, \Lambda_b) & b_{T_k}(\Lambda_b, \Lambda_c) \\ b_{T_k}(\Lambda_c, \Lambda_a) & b_{T_k}(\Lambda_c, \Lambda_b) & b_{T_k}(\Lambda_c, \Lambda_c) \end{pmatrix}$$

sowie $f_{T_k}(\Lambda_a)$, $f_{T_k}(\Lambda_b)$ und $f_{T_k}(\Lambda_c)$. Dabei dürfen Sie bei $f_{T_k}(\Lambda_a)$, $f_{T_k}(\Lambda_b)$ und $f_{T_k}(\Lambda_c)$ davon ausgehen, dass T_k entweder komplett in K oder gar nicht in K enthalten ist. Überlegen Sie sich, wie Sie nun die Matrix $B := (b(\Lambda_i, \Lambda_j))_{i,j=1}^m$ und den Vektor $y := (f(\Lambda_i))_{i=1}^m$ effizient assemblieren können.

Aufgabe 5.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Wir betrachten nun die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = \chi_K(x), \quad x \in \Omega, \qquad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

wobei das Teilgebiet $K \subset \Omega$ gegeben ist als $K := \bigcup_{i=1}^{6} K_i$ mit 2

- K_1 ein Kreis um $(4, 8)$ mit Radius $\frac{1}{2}$,
- K_2 ein Kreis um $(3, 6)$ mit Radius $\frac{1}{2}$,
- K_3 ein Kreis um $(5, 6)$ mit Radius $\frac{1}{4}$,
- K_4 ein Kreis um $(4.5, 4)$ mit Radius $\frac{1}{2}$,
- K_5 ein Kreis um $(2.5, 3)$ mit Radius $\frac{1}{2}$,
- K_6 ein Kreis um $(6.5, 2.5)$ mit Radius $\frac{1}{4}$.

Laden Sie sich die Datei `grid2.mat` auf der Homepage herunter. Diese enthält mit P und T eine Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (vgl. Aufgabe 2.4), in welchem K enthalten ist. Weiterhin beinhaltet die Datei einen Vektor `Dirichlet`, welcher die Indizes aller Randknoten des Gitters enthält.

Schreiben Sie nun eine `MATLAB`-Funktion, welche die Matrix $B := (b(\Lambda_i, \Lambda_j))_{i,j=1}^{m}$ und den Vektor $y := (f(\Lambda_i))_{i=1}^{m}$ aufstellt und das lineare Gleichungssystem $Bu = y$ löst. Visualisieren Sie ihre Lösung.
Hinweis: Beachten Sie die Randvorgabe!

Hinweis: Die folgende Visualisierungsfunktion sollte ein *leider etwas verspätetes* weihnachtliches Flair erzeugen:

```
g = figure;
hold on
for i = 1:length(T)
    patch('Faces',[1 2 3],'Vertices',P(T(i,:),:),'FaceVertexCData',u(T(i,:)),...
    'EdgeColor','none','FaceColor','interp');
end
r=(0:(1/50):1)';
g=(0.3:(0.6/50):0.9)';
b=(0.05:(0.3/50):0.35)';
map=[r,g,b];
colormap(map)
```

Ankündigung:

Am **20.01.2021** findet von **10-18 Uhr** die **Vorlesungsevaluation** statt. Weitere Informationen haben Sie bereits per Mail erhalten. Wir freuen uns auf Ihr Feedback.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.

- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.

- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 25.01.2021 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Numerik partieller Differentialgleichungen* an.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.

- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.