Abbildungen

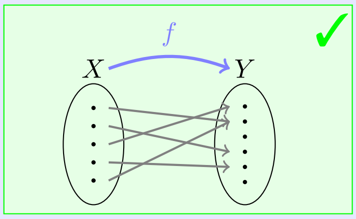
Erklärung

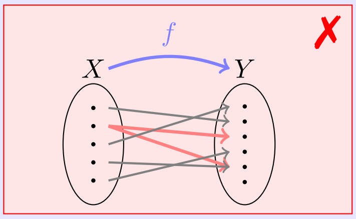
Abbildung

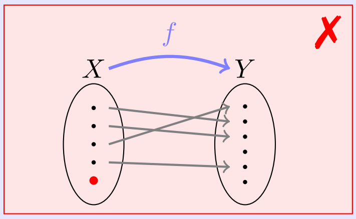
Definition einer Abbildung

Eine *Abbildung* $f : X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in X$ ein eindeutiges (oder auch: wohldefiniertes) $y \in Y$ zuordnet, welches dann mit $f(x)$ bezeichnet wird.
Man schreibt hier $x \mapsto f(x)$.

Die Menge X heißt der *Definitionsbereich* und die Menge Y heißt der *Bildbereich* oder *Wertebereich* der Abbildung f.







Hinweis

Hinweis

Erklärung

Bild und Urbild

Erklärung

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$, so heißt

1. $f(M) = \{y \in Y : \text{ es existiert ein } x \in M \text{ mit } f(x) = y\} = \{f(x) \in Y : x \in M\}$ das *Bild* von M unter f,
2. $f^{-1}(N) = \{x \in X : f(x) \in N\}$ das *Urbild* von N unter f.

Erklärung

Verknüpfung von Abbildungen

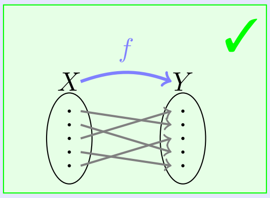
Sind $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ und $g : Y \to Z$, $y \mapsto g(y)$ zwei Abbildungen, so ist die *Verknüpfung* von f und g definiert als

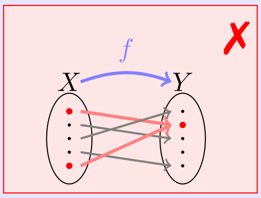
$$g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))\ \text{, d.h. } x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)).$$

Erklärung

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv*, wenn für alle $x, x' \in X$ aus $f(x) = f(x')$ stets $x = x'$ folgt.





Abbildung

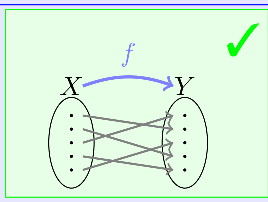
Hinweis

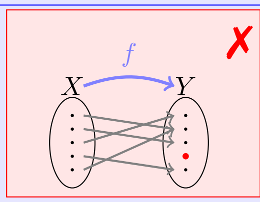
Äquivalent: f ist injektiv, wenn...

- ... für alle $x, x' \in X$ aus $x \neq x'$ stets $f(x) \neq f(x')$ folgt.
- ... jedes Element in Y höchstens ein Urbild in X besitzt.

Erklärung

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *surjektiv*, wenn zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.





Abbildung

Hinweis

Äquivalent: f ist surjektiv, wenn...

- ... jedes Element in Y mindestens ein Urbild in X besitzt.

Erklärung

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.
Äquivalent: f ist bijektiv, wenn...

- ... jedes Element in Y genau ein Urbild in X besitzt.

Erklärung

Die Umkehrabbildung

Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, dann existiert eine *Umkehrabbildung* $g : Y \to X$, $y \mapsto f^{-1}(\{y\})$. Üblicherweise wird die Umkehrabbildung zu f mit f^{-1} bezeichnet.

☺–☹

Aufgaben

Bild und Urbild

Lösung

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die folgenden Abbildungen jeweils das Bild von $[-1,1]$ und das Urbild von $\{1\}$.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 5$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$

d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$

Aufgabe 2. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Für jede Menge $A \subset X$ gilt: $A \subset f^{-1}(f(A))$.

b) Für jede Menge $B \subset Y$ gilt: $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Verknüpfung von Abbildungen

Lösung

Aufgabe 3. Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$.

a) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.

b) Bestimmen Sie die Wertebereiche von f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$.

c) Bestimmen Sie jeweils die Urbilder des Bildwertes 1.

Lösung

Aufgabe 4. Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}, (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$$
$$g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, 1).$$

a) Sind f und g injektiv oder surjektiv?

b) Wie sehen die Abbildungen $f \circ g$ und $g \circ f$ aus?

c) Sind $f \circ g$ und $g \circ f$ injektiv oder surjektiv?

Lösung

Aufgabe 5.

a) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung von Abbildungen assoziativ ist.

b) Widerlegen Sie, dass die Hintereinanderausführung von Abbildungen kommutativ ist.

c) Geben Sie zwei Abbildungen f und g an, für die dennoch $f \circ g = g \circ f$ gilt.

Injektivität und Surjektivität

Lösung

Aufgabe 6. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2$

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$

e) $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha \cdot x + \beta$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Lösung

Aufgabe 7. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine injektive (bzw. surjektive) Abbildung. Ist die folgende Abbildung g injektiv (bzw. surjektiv)?

$$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2, x \mapsto \big(x, f(x)\big)$$

Lösung

Aufgabe 8. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f ist injektiv.

b) Für alle $A \subset X$ gilt: $f^{-1}(f(A)) = A$.

c) Für alle $A_1, A_2 \subset X$ gilt: $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Umkehrabbildungen

Lösung

Aufgabe 9. Es sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung mit Umkehrfunktion g. Zeigen Sie, dass dann $(f \circ g)(y) = y$ und $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ gilt.