Mengen

Erklärung

Definition einer Menge

Eine Menge ist eine Zusamenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte.

Mengen werden mit Mengenklammern geschrieben!

Ist x ein Element der Menge X, so wird $x \in X$ geschrieben, andernfalls $x \notin X$.

Die leere Menge $\emptyset$ besitzt keine Elemente. Sie ist leer.

Achtung!
$x \neq \{x\}$
$x \in \{x\}$

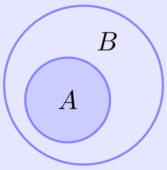
Hinweis

Erklärung

Teilmengen von Mengen

$A \subset B$, wenn gilt: $a \in A \Rightarrow a \in B$.

D.h. jedes Element von A ist auch ein Element von B.



Gleichheit von Mengen:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ und } B \subset A$$

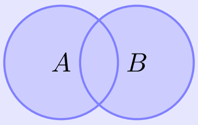
D.h. jedes Element von A ist in B enthalten und umgekehrt.

Erklärung

Erklärung

Mengenoperationen

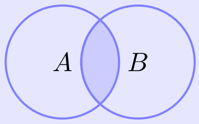
Vereinigung



$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Alle Elemente, die in A oder in B liegen.

Durchschnitt



$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

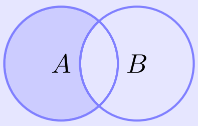
Alle Elemente, die in A und in B liegen.

Zwei Mengen A und B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Erklärung

Erklärung

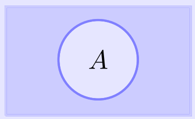
Differenz



$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Alle Elemente, die in A, aber nicht in B liegen.

Komplement



$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

Alle Elemente, die nicht in A liegen.

De Morgan'sche Regeln:
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Erklärung

Erklärung

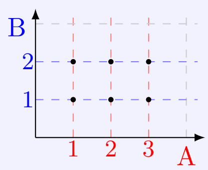
Kartesisches Produkt

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Die Elemente haben mehrere Koordinaten. Die erste Koordinate stammt aus dem ersten Faktor, die zweite Koordinate aus dem zweiten Faktor.

$A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{1, 2\}$

Dann ist:
$A \times B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$



Beispiel

Erklärung

Die Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A:

$$\mathcal{P}(A) := \{M : M \subset A\}.$$

Es gilt immer: $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$!

Achtung!
Die Elemente der Potenzmenge sind Mengen:
$M \subset A \;\Rightarrow\; M \in \mathcal{P}(A)$

Hinweis

Erklärung

Mächtigkeit / Kardinalität

Die Anzahl der Elemente einer Menge wird als Mächtigkeit oder Kardinalität bezeichnet.

Schreibweise: $|A|$ (oder: $\#A$).

- Ist $|A| = n$, so ist $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
- Ist $|A| = n$ und $|B| = m$, so ist $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Aufgaben

Definition einer Menge

Lösung

Aufgabe 1. Gegeben seien die Mengen $A := \{1\}$, $B := \{1,2\}$, $C := \{1,2,3,4\}$ $D := \{1,A,B,C\}$. Welche der folgenden Beziehungen sind richtig?

a) $1 \in B$	b) $A \subset C$	c) $\emptyset \in C$	d) $\emptyset \subset A$
e) $A \in C$	f) $1 \in D$	g) $2 \in D$	h) $\{2\} \subset D$
i) $A \in B$	j) $A \in D$	k) $A \subset D$	l) $\{A\} \subset D$
m) $\{B\} \subset D$	n) $\{1, A\} \in D$	o) $(A \cup B) \subset C$	

Mengenoperationen

Lösung

Aufgabe 2. Seien $A := \{1,2\}$ und $B = \{2,3,4\}$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

a) $A \cup B$	b) $A \cap B$	c) $A \setminus B$
d) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	e) $A \times B$	f) $(A \times A) \cap (B \times B)$
g) $(A \times B) \setminus (B \times B)$	h) $A \times A \times A$	

Lösung

Aufgabe 3. Es seien A, B und C Mengen. Zeigen Sie:

a) $(A \cup B)^\mathsf{c} = A^\mathsf{c} \cap B^\mathsf{c}$	b) $(A \cap B)^\mathsf{c} = A^\mathsf{c} \cup B^\mathsf{c}$	c) $A \setminus B = A \cap B^\mathsf{c}$
d) $(A^\mathsf{c})^\mathsf{c} = A$	e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$	

Lösung

Aufgabe 4. Es seien A, B, C Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $A \cup B = A \cup C$, so ist $B = C$.

b) Ist $A \cap B = A \cap C$, so ist $B = C$.

Potenzmengen

Lösung

Aufgabe 5. Es sei $A := \{1,2\}$ und $B := \{1,2,3\}$. Welche der folgenden Beziehungen sind richtig?

a) $1 \in A$	b) $\{1\} \subset A$	c) $1 \in \mathcal{P}(A)$
d) $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$	e) $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$	f) $A \in \mathcal{P}(B)$
g) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$	h) $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$	i) $\big\{\{1\}, A\big\} \subset \mathcal{P}(A)$
j) $(1,2) \in \mathcal{P}(A \times B)$	k) $\{1,2\} \times \{1,2\} \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$	

Mächtigkeit / Kardinalität

Lösung

Aufgabe 6. Es seien A und B zwei Mengen.

a) Geben Sie ein Beispiel für zwei Mengen A und B, sodass $|A \cap B| = 2$ und $|A \cup B| = 3$.

b) Geben Sie ein Beispiel für zwei Mengen A und B, sodass $|A \cap B| = |A|$.

c) Beweisen Sie: $|A \cap B| \leq |A|$. Wann ist die Ungleichung mit Gleichheit erfüllt?

d) Beweisen Sie: $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$.