Vektorräume und lineare Abbildungen

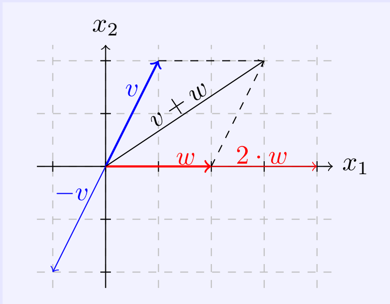
Erklärung

Der $\mathbb{R}^n$

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Vektorraum.
Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben als

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißen die Koordinaten von x.



Erklärung

Vektorraum

Vektorräume definiert man über einem Körper K. Eine Menge V zusammen mit

- einer „Vektoraddition“ (innere Verknüpfung) $+ : V \times V \longrightarrow \mathrm{V}$
- einer „Skalarmultiplikation“ (äußere Verknüpfung) $\cdot : K \times V \longrightarrow \mathrm{V}$

nennt man einen **Vektorraum** über dem Körper K

- $(V, +)$ ist eine *abelsche Gruppe*, d.h.
  - Abgeschlossenheit der Vektoraddition:
    $v + w \in V,\ \forall v, w \in V.$
  - Assoziativität:
    $u + (v + w) = (u + v) + w,\ \forall u, v, w \in V.$
  - Existenz eines neutralen Elements:
    $\exists e \in V\ :\ v + e = v,\ \forall v \in V.$
  - Existenz eines inversen Elements:
    $\forall v \in V\ \exists -v : v + (-v) = e.$
  - Kommutativität:
    $v + w = w + v,\ \forall v, w \in V.$
- Abgeschlossenheit der Skalarmultiplikation:
  $\lambda \cdot v \in V,\ \forall \lambda \in K, v \in V.$
- Es gelten Verträglichkeitsregeln
  für alle $v, w \in$ V und alle λ, $\mu \in$ K:
  - Assoziativität:
    $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v.$
  - Distributivgesetz I:
    $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v.$
  - Distributivgesetz II:
    $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w.$
  - Neutralität der $1 \in K$:
    $1 \cdot v = v.$

Erklärung

Untervektorraum

Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt **Untervektorraum** von V, wenn gilt:

- Der Untervektorraum ist nicht leer: $U \neq \emptyset.$
- Abgeschlossenheit bezüglich der Addition: $v + w \in U,\ \forall v, w \in U.$
- Abgeschlossenheit bezüglich Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot v \in U,\ \forall \lambda \in K, v \in U.$

Hinweis: Es genügt, diese Untervektorraumkriterien zu überprüfen, damit $U \subseteq V$ ein Untervektorraum ist. Sämtliche weiteren Eigenschaften „erbt“ U von V.

Es folgt: $0 \in U$ und zu $v \in U$ ist $-v \in U$. Ferner ist jeder Untervektorraum ein Vektorraum!

Erklärung

Lineare Abbildung und Vektorraumisomorphie

Seien V_1,V_2 Vektorräume. Eine Abbildung $f : V_1 \to V_2$ heißt **linear**, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Additivität: $f(v + w) = f(v) + f(w),\ \forall\ v, w \in V$
- Homogenität: $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v),\ \forall\ v \in V, \lambda \in K.$

Jede lineare Abbildung bildet die 0 auf die 0 ab. (Notwendig, nicht hinreichend.)

Mit linearen Abbildungen kann man rechnen. Für lineare Abbildungen f, g: $V_1 \to V_2$ und $h : V_2 \to V_3$ gilt:

- $\lambda \cdot f$ ist linear mit $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.
- $f + g$ ist linear mit $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- $h \circ f : V_1 \to V_3$ ist linear mit $(h \circ f)(x) = h(f(x))$.

Die Multiplikation einer Matrix mit Vektoren ist eine lineare Abbildung.

Ist $f : V_1 \to V_2$ eine bijektive lineare Abbildung, so heißen V_1 und V_2 **isomorph** zueinander.

Aufgaben

Vektorräume

Lösung

Aufgabe 1. Es sei $V := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ und für $f, g \in V, \lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ sei

$$(f+g)(n) := f(n) + g(n) \quad \text{und} \quad (\lambda \cdot f)(n) := \lambda \cdot f(n).$$

Zeigen Sie, dass V mit diesen Verknüpfungen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Untervektorräume

Lösung

Aufgabe 2. Es ist $\mathbb{R}[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass

$$U_\alpha := \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(\alpha) = 0\} \quad \text{und} \quad C_1 := \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(P) \leq 1\}$$

Untervektorräume von $\mathbb{R}[x]$ sind. Dabei bezeichnet $\deg(P)$ den Grad des Polynoms P.

Lösung

Aufgabe 3. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und U, W Untervektorräume von V. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $U \cap W$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $U + W$ ist ein Untervektorraum von V.

c) $U \cup W$ ist ein Untervektorraum von V.

Bemerkung: Sind $U \subseteq V$, $W \subseteq V$ zwei Teilmengen eines Vektorraums. Dann ist die (Minkowski-) Summe von U und W definiert als $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$.

Lösung

Aufgabe 4. Zeigen oder widerlegen Sie: Für jeden K-Vektorraum V und alle Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ gilt:

a) $(U_1 \cap U_2) + U_3 \subseteq (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3)$

b) $(U_1 \cap U_2) + U_3 \supseteq (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3)$

c) $(U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$

d) $(U_1 + U_2) \cap U_3 \supseteq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$.

Lineare Abbildungen

Lösung

Aufgabe 5. Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind:

a) $l_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ l_1(x) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3)$

b) $l_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \ l_2(x) = (x_1 + x_1^3, 1)$

c) $l_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ l_3(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_1 - 2x_2)$

d) $l_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ l_4(x) = (4 + 3x_1, \frac{x_1}{2} + x_2, 0)$

e) $l_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ l_5 = l_3 + l_4$

f) $l_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \ l_6 = l_1 + l_2$

g) $l_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ l_7 = 4 \cdot l_3 + 5 \cdot l_4$

h) $l_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ l_8 = l_1 \circ l_3$.

Lösung

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung, die jeden Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ an der x_2-Achse spiegelt. Wie sieht diese Abbildung aus? Ist sie linear?

Lösung

Aufgabe 7. Was macht die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ geometrisch/anschaulich?

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in [0, 2\pi).$$