Skalarprodukt und Orthogonalität

Erklärung

Skalarprodukt und Euklidische Norm

Erklärung

Seien $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das **(Standard-)Skalarprodukt** von v und w definiert als

$$\langle v, w \rangle = v^T \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i \in \mathbb{R}.$$

Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist die **Euklidische Norm** definiert als

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v^T \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \in \mathbb{R}.$$

Satz.(*Cauchy-Schwarz-Ungleichung*) Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Rechenregeln des Skalarprodukts

Für $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

I. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

II. $\langle \lambda \cdot v, w \rangle = \lambda \cdot \langle v, w \rangle$

III. $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$

Rechenregeln der Norm

Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

I. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

II. $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

III. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Erklärung

Geometrische Interpretation des Skalarprodukts

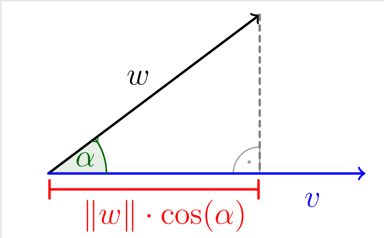
Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal**, wenn gilt

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Es besteht die folgende Beziehung zwischen dem von v und w eingeschlossenen Winkel α und dem Skalarprodukt von v und w:

$$\langle v, w \rangle = \cos(\alpha) \cdot \|v\| \cdot \|w\|.$$

Das Skalarprodukt von v und w ist also das Produkt der Länge von v und der Länge der orthogonalen Projektion von w auf v.



Erklärung

Orthonormalbasen und orthogonales Komplement

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Wir nennen die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eine **Orthonormalbasis**, falls sie paarweise orthogonal und normiert sind, das heißt $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\|v_i\| = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.

Erklärung

- Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ hat der normierte Vektor $w = \frac{v}{\|v\|}$ die Länge 1 und $\langle v, w \rangle = \|v\|$.
- Es muss nicht gefordert werden, dass $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, da dies bereits aus der Eigenschaft, paarweise orthogonal zu sein, folgt.

Satz. Jeder reelle Vektorraum V besitzt eine Orthonormalbasis.

Gegeben eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ von V lässt sich jeder Vektor $v \in V$ schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i.$$

Sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Das **orthogonale Komplement** von W ist definiert als

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\}$$

und ist ein Untervektorraum von V.

Erklärung

Orthogonale Abbildungen

Eine $n \times n-$Matrix A heißt **orthogonal**, wenn gilt $A^T \cdot A = E_n$. Das ist genau dann der Fall, wenn die Spaltenvektoren von A paarweise orthogonal und normiert sind.

Ist A eine orthogonale Matrix, dann gilt

$$\langle A \cdot v, A \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Erklärung

Wir nennen eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen reellen Vektorräumen orthogonal, wenn für $v, w \in V$ gilt

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Erklärung

Die Menge der orthogonalen Matrizen bilden eine Untergruppe der invertierbaren $n \times n-$Matrizen.

Orthogonale Abbildungen sind längen- und winkelerhaltend.

☺–☹

Aufgaben

Skalarprodukt und Euklidische Norm

Lösung

Aufgabe 1. Man beweise die folgenden elementargeometrischen Aussagen mit Hilfe des Skalarproduktes:

(a) Satz des Pythagoras.

(b) Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

(c) Im Parallelogramm ist die Summe der Diagonalquadrate gleich der Summe der 4 Seitenquadrate.

Lösung

Aufgabe 2. Neben der Euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ lassen sich noch weitere sinnvolle Normen definieren. Die „1-Norm "$\|\cdot\|_1$ ist für alle $v \in \mathbb{R}^n$ definiert als

$$\|v\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|.$$

Zeigen sie, dass die 1-Norm die Rechenregeln einer Norm erfüllt.

Orthonormalbasen und orthogonales Komplement

Lösung

Aufgabe 3.

(a) Sind die Vektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal?
Sind sie orthonormal?

(b) Sei $U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$, Berechnen Sie $U^\perp$.

(c) Geben Sie alle $a, b \in \mathbb{Z}$ an, sodass $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

(d) Seien $v_1, \dots, v_m$ orthonormale Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass $m \leq n$ ist.

Orthogonale Abbildungen

Lösung

Aufgabe 4. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ (d) die Einheitsmatrix

Lösung

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass für orthogonale Matrizen A gilt $\det(A) = \pm 1$.