Determinante

Erklärung

Axiomatische Einführung der Determinante

Die Determinante ist eine Abbildung

$$\det : K^{n\times n} \to K$$

vom Raum der $n \times n-$Matrizen in den zugrundeliegenden Körper, für die gilt:

(i) Sie ist *multilinear*, d.h. für jede Spalte $v_i \in K^n$ einer Matrix $A = (v_1, \ldots, v_n)$ gilt

$$\begin{aligned}\det(v_1,\ldots,v_{i-1},\lambda v_i+\mu w, v_{i+1},\ldots,v_n) =& \lambda \det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)\\ &+\mu\det(v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_n),\end{aligned}$$

wobei $w \in K^n$ und $\lambda, \mu \in K$.

(ii) Sie ist *alternierend*, d.h., wenn zwei Spalten v_i und v_j mit $i \neq j$ gleich sind, ist die Determinante gleich 0.

(iii) Sie ist *normiert*, d.h. für die Einheitsmatrix E_n gilt $\det(E_n) = 1$.

Erklärung

Aus (i) und (ii) folgt unmittelbar, dass sich das Vorzeichen der Determinante ändert, wenn man zwei Spalten vertauscht und dass $\det(A) = 0$, wenn zwei Spalten linear abhängig sind.

Erklärung

Geometrische Interpretation

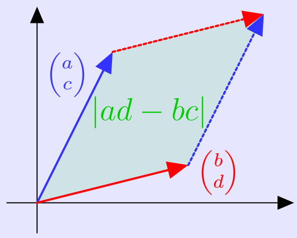
Für eine $n \times n-$Matrix A misst die Determinante das (orientierte) Volumen des von ihren Spalten $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ aufgespannten Parallelotops im $\mathbb{R}^n$. Dieses Volumen hat genau dann den Wert 0, wenn die Spalten von A linear abhängig sind. Zum Beispiel hat die $2 \times 2-$Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Determinante

$$\det(A) = ad - bc.$$

Es ergibt sich im Spezialfall das folgende Bild:



Der Flächeninhalt ist genau dann Null, wenn die aufspannenden Vektoren parallel (und damit linear abhängig) sind.

Erklärung

Laplace'scher Entwicklungssatz

Mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz kann man die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ durch Entwicklung nach einer Zeile oder einer Spalte berechnen. Die beiden Formeln lauten

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, \det(A_{i,j}) \quad \text{(Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, \det(A_{i,j}), \quad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)}$$

wobei $A_{i,j}$ die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Erklärung

Schachbrettmuster der Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Erklärung

Anwendung der Determinante

Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) A invertierbar.

(ii) Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.

(iii) $\det(A) \neq 0$.

Ist A invertierbar, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A),$$

wobei $\operatorname{Adj}(A)$ die Adjunkte von A bezeichne (*Cramer'sche Regel*).

Erklärung

Leibniz-Formel

Die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ kann auch berechnet werden durch

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Erklärung

S_n ist Menge aller Permutationen von $1, \ldots, n$.
Eine Permutation σ ist eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}, i \mapsto \sigma(i).$$

Hier verwendet man häufig die Schreibweise

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

☺ – ☹

Aufgaben

Axiomatische Charakterisierung

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\det : GL_n(K) \to K \setminus \{0\}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Dabei bezeichnet $GL_n(K)$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.

Lösung

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ gilt

$$\text{(i) } \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \text{ für } \lambda \in K, \quad \text{(ii) } \det(A^t) = \det(A), \quad \text{(iii) } \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

Lösung

Laplace'scher Entwicklungssatz

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lösung

Aufgabe 4. (i) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir nennen eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ *obere Dreiecksmatrix*, wenn für alle $i < j$ gilt $a_{i,j} = 0$. Zeigen Sie, dass für eine obere Dreiecksmatrix gilt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Lösung

Anwendung der Determinante

Aufgabe 5. Prüfen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind und bestimmen ggf. mit Hilfe der Cramerschen Regel das Inverse.

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \quad C = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

Leibniz-Formel

Aufgabe 6 (Regel von Sarrus)**.** Zeigen Sie mit Hilfe der Leibniz-Formel, dass für die Determinante einer 3×3-Matrix $A = (a_{i,j})$ gilt

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}.$$

Lösung