Eigenwerte, Basiswechsel & Diagonalisierbarkeit

Erklärung

Basiswechsel für den $\mathbb{R}^n$

Ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis und $A \in GL_n(\mathbb{R})$, so ist $B' = \{Av_1, \dots, Av_n\}$ auch eine Basis. Die Basis eines Vektorraums ist also nicht eindeutig. A heißt **Basiswechselmatrix**.

Erklärung

Darstellungsmatrix und allgemeine Basiswechselmatrix

Seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume gleicher Dimension und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $B' = \{w_1, \dots w_n\}$ eine Basis von W.

Für $j = 1, \dots, n$ ist $f(v_j) \in W$ und besitzt daher eine eindeutige Darstellung als Linearkombination aus Vektoren der Basis B, d.h. die Basiswechselmatrix $A = (a_{ij})$ mit $i, j = 1, \dots, n$ ist damit bestimmt durch:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \text{ mit } j = 1, 2, \dots, n.$$

Mit anderen Worten: Wir schreiben die Koeffizienten dieser Linearkombination in die j-te Spalte einer Matrix A.

Rechenregeln:
Seien A, B, C Basen von V. Es gilt
- $(T_B^A)^{-1} = T_A^B$
- $T_B^A = T_B^C \cdot T_C^A$.

Beispiel

Die damit definierte Matrix heißt **Darstellungsmatrix** und wir schreiben sie als $M_B^A(f)$.
Im Fall $V = W$ beschreibt $T_B^A := M_B^A(Id_V)$ den **Basiswechsel** von A nach B und man nennt sie **Basiswechselmatrix**.

Erklärung

Basiswechselsatz

Seien A, A' Basen von V und B, B' Basen von W und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W. Dann gilt für den **Basiswechsel**

$$M_{B'}^{A'}(f) = T_{B'}^{B} \cdot M_B^A(f) \cdot T_A^{A'}.$$

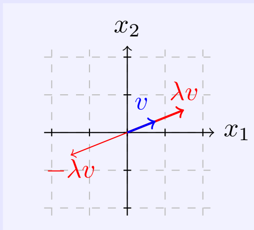
Erklärung

Eigenwert und Eigenvektor

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und Φ eine lineare Abbildung von V in sich selbst (Endomorphismus). $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von Φ, wenn ein $v \in V, v \neq 0$ existiert mit

$$\Phi(v) = \lambda \cdot v.$$

Jedes $v \in V, v \neq 0$, das obige Gleichung erfüllt, heißt **Eigenvektor** von Φ zum Eigenwert λ. Ein Eigenvektor ist demnach ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, der lediglich um den Faktor λ gestreckt und eventuell (negatives Vorzeichen!) am Ursprung gespiegelt wird.



Erklärung

Charakteristisches Polynom und Eigenräume, Algebraische und geometrische Vielfachheit

Für eine $n \times n$ Matix A, ist das **charakteristische Polynom** definiert als $\chi_A(x) := \det(x \cdot E_n - A)$.
Die **Nullstellen** von χ_A sind die Eigenwerte von A.
$\mathrm{Eig}(A, \lambda) := \{v \in K^n : Av = \lambda v\} = \ker(\lambda E - A)$ heißt **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ.

Die Vielfachheit eines Eigenwerts λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms bezeichnet man als **algebraische Vielfachheit**. Die Dimension des zugehörigen Eigenraums wird als **geometrische Vielfachheit** von λ genannt. Letztere ist mindestens 1 und höchstens gleich der algebraischen Vielfachheit von λ.

Hinweis

Erklärung

Diagonalisierbarkeit

Eine lineare Abbildung f heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B aus Eigenvektoren gibt.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) A ist diagonalisierbar.
(2) Es existiert eine Basiswechselmatrix T, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten von A auf der Diagonalen.
(3) Geometrische und algebraische Vielfachheit stimmen überein.

Es folgt insbesondere: Hat die $n \times n$ Matrix A genau n verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.

Aufgaben

Basiswechsel für den $\mathbb{R}^n$

Lösung

Aufgabe 1. Gegeben sei der Standardvektorraum der Ebene $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $E = (e_1, e_2)$ und den Standardvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Basis $B = (v_1, v_2)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Basiswechsel von B nach E sowie von E nach B.

Lösung

Aufgabe 2. Sei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, wobei e_i die Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind. Weiterhin sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Basiswechsel von B nach E sowie von E nach B.

Darstellungsmatrix und allgemeine Basiswechselmatrix, Basiswechselsatz

Lösung

Aufgabe 3. Seien $B_1 := \{(1,1)^T, (0,1)^T\}$, $B_2 := \{(-1,-1)^T, (1,0)^T\}$ und $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. D.h. f ist die lineare Abbildung, welche die Einträge in einem Vektor vertauscht und die neue erste Komponente noch mit -1 multipliziert.
Bestimme die Darstellungsmatrix A zu dieser Abbildung.

Eigenwert und Eigenvektor, Charakteristisches Polynom und Eigenräume

Lösung

Aufgabe 4. Es sei die Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A, die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume. Ist A diagonalisierbar?

Algebraische und geometrische Vielfachheit, Diagonalisierbarkeit

Lösung

Aufgabe 5. Ist A diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Aufgabe 6. Diagonalisiere die Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Aufgabe 7. Gegeben sei die diagonalisierbare Matrix B aus *Aufgabe 6*. Berechne B^{18}.