Folgen I

Erklärung

Definition von Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \mapsto a_n$.

Man schreibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots)$.
Häufig schreibt man auch kurz (a_n) für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ heißen die Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. a_n ist das n-te Folgenglied der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Erklärung

Grenzwert von Folgen

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert (oder: Limes) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Man schreibt dann:

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, oder auch $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent. Eine Folge, die gegen den Wert 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

Erklärung

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gelten die Rechenregeln:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

und wenn ferner $b \neq 0$ ist:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Erklärung

Sandwich-Lemma:
Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, so ist auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert a.

Erklärung

„Konvergenz“ in anderen Worten: a heißt Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn gilt:

- Zu jedem vorgegebenen Abstand $\varepsilon > 0$ haben ab einem Index N alle Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Abstand zu a der geringer ist als ε.
- Zu jedem vorgegebenen Abstand $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche einen Abstand haben, der größer ist als ε.
- In jeder ε-Umgebung $U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ um a liegen fast alle, d.h. alle bis auf endlich viele, Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Erklärung

Beschränkte Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

1. Nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leq C$ für alle $n \in N$.
2. Nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $C \leq a_n$ für alle $n \in N$.
3. Beschränkt, wenn es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $-C \leq a_n \leq C$ für alle $n \in N$.
   Gleichbedeutend: $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis

Eine konvergente Folge ist stets beschränkt.
Aber eine beschränkte Folge ist nicht zwingend konvergent.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Erklärung

Monotone Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

1. monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. streng monoton wachsend, falls $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3. monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
4. streng monoton fallend, falls $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Erklärung

Monotone Konvergenz

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende oder fallende Folge und ist sie beschränkt, dann ist sie konvergent.

Erklärung

Cauchy-Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$.

Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

☺–☹

Aufgaben

Definition von Folgen

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die ersten 10 Folgenglieder dieser Folgen:

a) $a_n = \frac{1}{n} - 1$ b) $a_n = (-1)^n(n+1)^2$ c) $a_n = \frac{2n^2+1}{n-1}$

d) $a_n = 2$ e) $a_n = \sum_{j=1}^{n}(j-1)$

Lösung

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die ersten 10 Folgenglieder dieser rekursiv definierten Folgen:

a) $a_n = a_{n-1} + 1$ mit $a_1 = 2$

b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ mit $a_1 = a_2 = 1$

c) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_{n-1}, & \text{falls } a_{n-1} \text{ gerade} \\ 3a_{n-1}+1, & \text{falls } a_{n-1} \text{ unggerade} \end{cases}$ mit $a_1 = 5$

d) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_{n-1}, & \text{falls } a_{n-1} \text{ gerade} \\ 3a_{n-1}+1, & \text{falls } a_{n-1} \text{ unggerade} \end{cases}$ mit $a_1 = 3$

Lösung

Konvergenz von Folgen

Aufgabe 3. Überprüfen Sie diese Folgen auf Konvergenz:

a) $a_n = -\frac{1}{n} + 2$ b) $a_n = (-1)^n\frac{n-1}{2}$ c) $a_n = -1$

d) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ e) $a_n = \frac{n^2-3n+1}{7n^4+2n}$ f) $a_n = \frac{2n^3-4n-\pi}{90n^2+1000}$

Lösung

Aufgabe 4. Zeigen Sie mithilfe des Sandwich-Lemma, dass für festes $q > 0$, $q \in \mathbb{Q}$, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n^q}$ konvergiert.

Lösung

Monotone Folgen

Aufgabe 5. Welche dieser Folgen sind monoton wachsend oder fallend? Handelt es sich um strenge Monotonie?

a) $a_n = 5n + 8$ b) $a_n = -n^2 - \frac{2}{n}$ c) $a_n = (-1)^n n^2 + 1$

d) $a_n = 42$ e) $a_n = (n-3)^2$ f) $a_n = \sum_{j=1}^{n}(j-3)^2$

Lösung

Aufgabe 6. Zeigen Sie: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei monoton wachsende Folgen, so ist auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
Ist in diesem Fall auch $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Gilt die Aussage auch dann noch, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Lösung

Beschränkte Folgen

Aufgabe 7. Welche dieser Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt?

a) $a_n = 3n + \frac{1}{n}$ b) $a_n = (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ c) $a_n = \frac{4n^2+1}{n^3-2n-8}$

d) $a_n = 7$ e) $a_n = (-1)^n\log(n)$ f) $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$

Lösung

Aufgabe 8. Geben Sie Folgen an, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

a) Beschränkt und konvergent. b) Beschränkt, aber nicht konvergent.

c) Monoton wachsend und beschränkt. d) Monoton wachsend und nicht beschränkt.

e) Nicht monton, aber konvergent.

Lösung