Reihen

Erklärung

Definition von Reihen

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann heißt die Folge

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit } S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die der Folge $(a_n)_n$ zugeordnete *Reihe*. Diese wird auch notiert als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ist $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, so heißt die Reihe *konvergent*. In diesem Fall nennen wir s den *Wert* der Reihe. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, so heißt die Reihe *absolut konvergent*. Andernfalls heißt die Reihe *divergent*.

Aus absoluter Konvergenz folgt (normale) Konvergenz.

Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Folge der Partialsummen* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

Erklärung

Konvergenzkriterien

Hinweis

Leibniz-Kriterium

Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

Cauchy-Kriterium

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $m \geq n \geq N$ gilt:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Für die Konvergenz ist $a_k \to 0$ für $k \to \infty$ notwendig, aber nicht hinreichend!

Majorantenkriterium

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe mit $|a_k| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Minorantenkriterium

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe mit $a_k \geq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, dann divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Hinweis

Quotientenkriterium

Ist $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und existiert

$$q := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für $q < 1$ absolut. Ist $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ für fast alle k, so divergiert die Reihe.

Wurzelkriterium

Falls

$$q := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

existiert und $q < 1$, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, im Fall $q > 1$ ist die Reihe divergent.

Bei beiden Kriterien: Falls $q = 1$ ist keine Aussage über Konvergenz möglich.

Erklärung

Rechenregeln

Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen und $c \in \mathbb{R}$, dann konvergieren auch:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \text{ und } c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) \text{ und}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} (a_i \cdot b_j).$$

Für divergente Reihen gelten diese Rechenregeln im Allgemeinen nicht!

Erklärung

Wichtige Reihen

Die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent und hat den Wert $\frac{\pi^2}{6}$.

Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ ist nur für $|q| < 1$ konvergent und hat dann den Wert $\frac{1}{1-q}$.

☺ – ☹

Aufgaben

Definition von Reihen

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden endlichen Summen:

a)	$\sum 1/k$	b)	$\sum (-1)^k$	c)	$\sum \pi$
d)	$\sum k$	e)	$\sum (2k-4)$	f)	$\sum 1/n^s$ mit $s > 0$

Aufgabe 2. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für jedes $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Folgern Sie daraus, dass $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| < 1$ konvergiert und für $|q| > 1$ divergiert. Was gilt für $q = 1$?

Konvergenz von Reihen

Aufgabe 3. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum 1/k^3$
b) $\sum (-1)^k (1/2 - 1/k)^k$
c) $\sum 1/\sqrt{k}$
d) $\sum x^k/k!$ für $x \in \mathbb{R}$, $x \leq 1$.
e) $\sum (-1)^k 1/k$

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$. Bestimmen Sie ferner den Grenzwert.

Aufgabe 5. Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a > 0$ und $a_n \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$.

Rechenregeln

Aufgabe 6. Geben Sie ein Beispiel an, warum die Rechenregel $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ nicht für divergenze Reihen gilt, d.h. geben Sie zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert, aber $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergiert.