Integration

Erklärung

Treppenfunktionen und das Integral

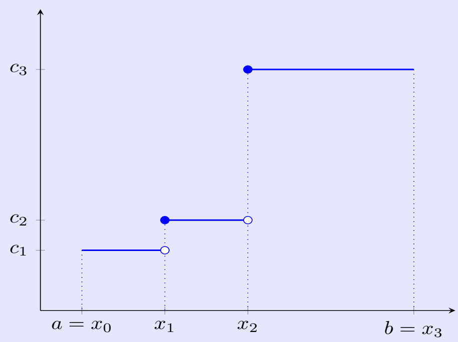
Es sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine Funktion $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

von $[a,b]$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$t(x) = c_i$$

für $x \in [x_{i-1}, x_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Mit $\mathcal{T}([a,b])$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$.



Wir definieren dann das *Integral* der Treppenfunktion t auf $[a,b]$ als

$$\int_a^b t(x)dx := \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Für eine Funktion $f : S \to [a,b]$ mit $[a,b] \subseteq S$ definiert man

$$\mathcal{T}^*(f,[a,b]) = \{t \in \mathcal{T}([a,b]) \mid t(x) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b]\}$$
$$\mathcal{T}_*(f,[a,b]) = \{t \in \mathcal{T}([a,b]) \mid t(x) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b]\}.$$

Erklärung

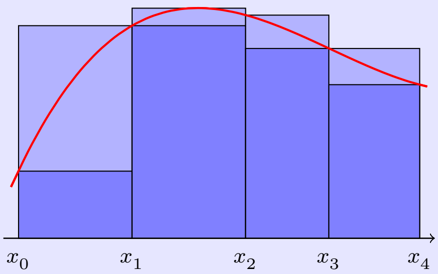
Definition Riemann-Integral

Wir nennen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar*, wenn

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\left\{\int_a^b t(x)dx \;\middle|\; t \in \mathcal{T}^*(f,[a,b])\right\} = \sup\left\{\int_a^b t(x)dx \;\middle|\; t \in \mathcal{T}_*(f,[a,b])\right\} =: \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Die linke Seite bezeichnet man auch als *Oberintegral*, die rechte Seite als *Unterintegral* von f. In diesem Fall definieren wir das *Integral von f über* $[a,b]$ als

$$\int_a^b f(x)dx := \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$



Erklärung

Sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist das *uneigentliche Integral* im Fall der Konvergenz definiert durch

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Analog ist das uneigentliche Integral für $-\infty \leq a < b < \infty$ und $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ definiert.

Sind $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$, dann sind auch $f + g$ und $c \cdot f$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Interpretation als Flächeninhalt
Sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann entspricht das Integral von f über $[a,b]$ dem (orientierten) Flächeninhalt, den f auf dem Intervall $[a,b]$ mit der x-Achse einschließt.

Erklärung

Erklärung

Wichtige Aussagen

Mittelwertsatz der Integralrechnung
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

In anderen Worten: Für eine stetige Funktion entspricht das Integral über einen Intervall $[a,b]$ dem Produkt der Intervalllänge $b - a$ mit dem Funktionswert von f einer Stelle $c \in [a,b]$.

Erklärung

(Stückweise) stetige Funktionen sind integrierbar.

Hauptsatz der Differential -und Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(y)dy$$

eine *Stammfunktion* von f, d.h. $F' = f$.
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

☺ – ☹

Aufgaben

Treppenfunktionen und das Integral

Lösung

Aufgabe 1. (i) Man berechne für $a > 1$ das Integral

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx$$

mit Hilfe von Riemann-Summen.
Anleitung: Nutze die Unterteilung

$$1 = x_0 < \ldots < x_n = a \quad \text{mit } x_i = a^{i/n} \text{ für } 0 \leq i \leq n.$$

(ii) Mit gleicher Unterteilung wie in (i) berechne man für $a > 1$ das Integral

$$\int_1^a \ln(x) dx$$

für $a > 1$ mit Hilfe von Riemann-Summen.

Riemann-Integral

Lösung

Aufgabe 2. Zeige, dass die *Dirichlet-Funktion*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nicht integrierbar ist.

Lösung

Aufgabe 3. Zeige mittels Ober- und Untersumme, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Riemann-integrierbar ist.

Lösung

Aufgabe 4. Berechne die folgenden Integrale:

$$(a) \quad \int_{-1}^1 x^3 dx, \quad (b) \quad \int_0^\infty e^{-x} dx, \quad (c) \quad \int_1^5 \frac{1}{x} dx, \quad (d) \quad \int_0^1 2e^{2x-1} dx, \quad (e) \quad \int_0^\pi \cos(x) dx.$$

Wichtige Aussagen

Lösung

Aufgabe 5 (Partielle Integration)**.**

(i) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeige, dass gilt

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

(ii) Nutze diese Regel, um die folgenden Integrale zu berechnen:

$$(a) \int_0^\pi x \cdot \cos(x) dx, \quad (b) \int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx, \quad (c) \int_1^2 \ln(x) dx.$$

Lösung

Aufgabe 6 (Substitution)**.**

(i) Seien $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar. Zeige, dass gilt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

(ii) Nutze diese Regel, um die folgenden Integrale zu berechnen:

$$(a) \quad \int_{\pi/2}^\pi \sin(2x + \pi) dx, \quad (b) \quad \int_1^2 \frac{1}{5x - 7} dx, \quad (c) \quad \int_0^\infty 2x \cdot e^{x^2} dx.$$