



Übungsklausur

Aufgabe 1:

- (a) Geben sie einen linearen Kongruenzgenerator mit Periodenlänge 16 an, der maximale Periode besitzt. Begründen sie ihre Wahl mit dem Satz von Knuth.
- (b) Gegeben sei nun der lineare Kongruenzgenerator

$$x_{i+1} = (7x_i + b) \pmod{30}.$$

Für welche $b \in \{0, 1, \dots, 29\}$ gibt es Startwerte x_0 , zu denen Orbits der Periodenlänge 2 gehören?

Aufgabe 2:

Das Alter a der in einem Land lebenden Berufstätigen sei normalverteilt mit Mittelwert 40 und Varianz 60. Das monatliche Einkommen e in Euro eines Berufstätigen sei

$$e = (50a - 200)^+.$$

Beschreiben sie ein Monte-Carlo-Verfahren zur Berechnung des mittleren Einkommens der Berufstätigen. Geben sie insbesondere ein Verfahren zur Erzeugung der dabei benötigten Zufallszahlen an.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit

$$f(x) := \sqrt{\frac{1}{1-x} - 1}.$$

Sei weiter X eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen sie die Dichtefunktion der Zufallsvariablen $Y = f(X)$.

Aufgabe 4:

- (a) Beschreiben sie einen Algorithmus, der mit Hilfe der Verwerfungsmethode Zufallszahlen simuliert, die der Verteilung $F : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$ mit

$$F(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$$

genügen. Verwenden sie dafür nur einen Zufallszahlengenerator, der auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen simulieren kann.

- (b) Berechnen sie die mittlere Akzeptanzwahrscheinlichkeit des Algorithmus aus (a).

Aufgabe 5:

Sei (Y, Z) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit quadratisch integrierbaren Komponenten, wobei $\mathbb{E}(Z)$ leicht zu berechnen sei und $\mathbb{E}(Y) = a$ gesucht ist. Für jede Wahl von $b \in \mathbb{R}$ eignet sich damit neben Y auch

$$Y_b = Y - b(Z - \mathbb{E}(Z))$$

als Basisexperiment zur Berechnung von a .

- (a) Geben sie eine Methode zur direkten Simulation von Y_b an.
- (b) Zeigen sie, dass gilt

$$\min_{b \in \mathbb{R}} \sigma^2(Y_b) = \sigma^2(Y) \cdot (1 - \rho^2(Y, Z)) = \sigma^2(Y_{b^*})$$

mit

$$b^* = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sigma^2(Z)}$$

- (c) Wie sollte Z im Idealfall gewählt werden?