GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Monte Carlo Methoden
WS 2019/20
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 5

Abgabe bis Donnerstag, 23.01.

Aufgabe 11: [Antithetische Variate]

(a) Betrachten sie einen d-dimensionalen Zufallsvektor X, der symmetrisch verteilt bezüglich $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist, und eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, sodass $f(X)$ quadratisch integrierbar ist. Zeigen sie

$$\sigma^2(\tilde{Y}) < \frac{1}{2}\sigma^2(Y) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Cov}(f(X), f(2\mu - X)) < 0$$

für die Zufallsvariablen $Y = f(X)$ und $\tilde{Y} = f_g(X)$, wobei f_g den geraden Anteil von f bezeichnet.

(b) Zeigen sie ferner, dass im Fall $d = 1$ strenge Monotonie von f hinreichend für $\sigma^2(\tilde{Y}) < \frac{1}{2}\sigma^2(Y)$ ist.

Aufgabe 12: [Antithetische Variate]

Betrachten sie für $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ die quadratisch integrierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1} \cdot \exp(-x) & \text{für } x \in (0,1) \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion besitzt eine Singularität in $x = 0$ und für ihr Integral ist keine explizite Formel bekannt.

(a) Zeigen sie, dass für eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable X

$$\sigma^2(f(X)) \leq \frac{1}{2\alpha - 1}$$

und

$$\sigma^2(f_g(X)) \geq \frac{\exp(-2)}{2 \cdot (2\alpha - 1)} - \frac{1}{\alpha^2}$$

gelten.

(b) Ist für Werte von α nahe bei $\frac{1}{2}$ antithetisches Sampling sinnvoll?

Aufgabe 13: [Stratified Sampling]

Bei der praktischen Durchfürhung der Methode M_n^{prop} des Stratified Sampling mit proportionalen Wiederholungszahlen betrachten wir zur Schätzung von $a = E[f(X)]$ das Verfahren

$$M_n^{prop} = \sum_{j=1}^{m} \left(p_j \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_j} f\left(X_i^{(j)}\right) \right)$$

mit $n_j = [p_j \cdot n]$ für $j = 1, \ldots, m$.

(a) Zeigen sie, dass die Zufallsvariablen

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \sigma_j^2}} \cdot (M_n^{prop} - a)$$

asymptotisch standard-normalverteilt sind.

Hinweis: Benutzen sie die Tatsache, dass aus der Verteilungskonvergenz von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen X und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Y die Verteilungskonvergenz von $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $X + Y$ folgt, falls X und Y sowie für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch X_n und Y_n unabhängig sind.

(b) Konstruieren sie asymptotische Konvergenzinteralle der Form

$$[M_n^{prop} - L_n, M_n^{prop} + L_n]$$

zum Niveau $1 - \delta$ für a.