Übung 4

Abgabe bis Donnerstag, 12.12

Aufgabe 7: [Inversionsmethode]

Entwerfen und implementieren sie einen Algorithmus zur Simulation der Arkussinus-Verteilung, die durch die Dichte

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot (x \cdot (1-x))^{-1/2} & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 8: [Verwerfungsmethode]

(a) Entwickeln, implementieren und testen sie einen Algorithmus zur Simulation der Gleichverteilung auf dem Simplex

$$S = \left\{ x \in [0,1]^d \mid \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1 \right\},$$

der auf der Verwerfungsmethode basiert.

(b) Untersuchen sie die Kosten ihres Algorithmus aus (a) in Abhängigkeit von der Dimension d. Berechnen sie dazu die Akzeptanzwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 9: [Verwerfungsmethode]

Beschreiben sie die Verwerfungsmethode zur Erzeugung von Zufallsvariablen mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1, \\ \frac{3}{4}(1+x)(1-x) & \text{für } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{für} x \geq 1 \end{cases}$$

Verwenden sie dazu als approximative Dichte auf dem Intervall $[-1, 1]$

$$g(x) = 1 - |x|.$$

(a) Finden sie das minimale $c \in \mathbb{R}$, für das $cg(x) \geq f(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.

(b) Geben sie die Akzeptanzwahrscheinlichkeit an.

(b) Geben sie eine Methode zur Erzeugung von Zufallszahlen mit der Dichte g an.

Aufgabe 10: [Polar-Masaglia-Methode]

Sei (X_1, X_2) gleichverteilt auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ und $S = X_1^2 + X_2^2$. Zeigen sie, dass der durch

$$Z_i = X_i \sqrt{(-2 \ln S)/S} \quad \text{für } i = 1, 2$$

definierte Zufallsvektor (Z_1, Z_2) standard-normalverteilt ist.