Übung 3

Abgabe bis Donnerstag, 28.11.

Aufgabe 4: [Stochastik]

(a) Konstruieren sie zwei Zufallsvariablen, die unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

(b) Für Zufallsvariablen $X, Y \in L^2$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$\hat{Y}_{a,b} = a + bX$$

und es gelte $\sigma(X) > 0$ sowie $\sigma(Y) > 0$. Zeigen sie, dass

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \mathrm{E}\left(Y - \hat{Y}_{a,b}\right)^2 = \mathrm{E}\left(Y - \hat{Y}_{a^*,b^*}\right)^2 = \sigma^2(Y) \cdot \left(1 - \rho^2(X,Y)\right)$$

mit

$$a^* = \mathrm{E}(Y) - b^*\mathrm{E}(X), \quad b^* = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma^2(X)}$$

gilt.

Aufgabe 5: [Ruinproblem]

Das klassische Ruinproblem basiert auf einer unabhängigen Folge von Zufallsvariablen V_t, die jeweils die Verteilung

$$P(\{V_t = 1\}) = p, \quad P(\{V_t = -1\}) = 1 - p$$

mit $p \in (0,1)$ besitzen und angeben, ob ein Spieler in Runde t gewinnt oder verliert. Setzt der Spieler pro Runde den Einsatz 1 und bezeichnet $n \in \mathbb{N}$ sein Startkapital, so ist

$$X_t = x + \sum_{s=1}^{t} V_s$$

sein Kapital nach t Runden. Wenn $z \in \mathbb{N}$ mit $z > x$ das angestrebte Zielkapital des Spielers ist, so lässt sich das Spielende durch die Eintrittszeit

$$T = \inf\{t \in \mathbb{N} \mid X_i \in \{0, z\}\}$$

definieren. Für $t, x \in \mathbb{N}$ sei

$$f(x,t) = P(\{T \leq t\} \cap \{X_T = z\})$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler mit Startkapital x bis zur Zeit t sein Zielkapital z erreicht hat.

(a) Beweisen sie für $t \geq 2$ die Rekursionsformel

$$f(x,t) = p \cdot f(x+1, t-1) + (1-p) \cdot f(x-1, t-1).$$

(b) Entwickeln und implementieren sie einen Algorithmus zur Berechnung und grafischen Darstellung der Funktion $x \mapsto f(x,t)$.

Aufgabe 6: [Kasino]

Ein Kasino bietet folgendes Roulette-Spiel an: In jeder Spielrunde erhält ein Spieler mit Wahrscheinichkeit $p = \frac{18}{37}$ den verdoppelten Einsatz oder verliert mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ seinen Einsatz. Sie spielen dieses Spiel mit einem Startkapital von x Euro und der folgenden Strategie:

- Ihr Starteinsatz beträgt 1 Euro.
- Verlieren sie, so verdoppeln sie ihren Einsatz; wenn sie nicht mehr verdoppeln können, setzen sie ihr gesamtes restliches Vermögen ein.
- Gewinnen sie, so starten sie wieder mit einem Einsatz von 1 Euro.
- Das Spiel endet, wenn sie kein Geld mehr haben, oder bei z Euro angekommen sind.

(a) Schreiben sie ein Programm in einer Programmiersprache ihrer Wahl, welches für Inputparameter Startkapital x, Abbruchkapital z und Simulationsanzahl n dieses Spiel n Mal simuliert und am Ende die geschätzte Gewinnwahrscheinlichkeit

$$\hat{p} = \frac{\#\text{erfolgreicheSpiele}}{n}$$

ausgibt.

(b) Testen sie ihr Programm für $x = 100, z = 200$ und $n = 100, 1.000, 10.000, 100.000$.

(c) Was folgern sie daraus für ihre Spielstrategie?