Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

3. Übungsblatt (erschienen am 29.10.2019)

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)
Bestimmen Sie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I[f] = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ die vier Gewichte w_1, w_2, w_3, w_4 der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formel mit $m = 4$ äquidistanten Knoten.

Aufgabe 3.2 (schriftliche Aufgabe)[1+2.5+2.5 Punkte]
Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I[f] = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ werden die abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln mit einer ungeraden Anzahl $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, äquidistanter Knoten betrachtet.

(a) Vergewissern Sie sich, dass $x_{m+1-i} = -x_i$ für $i = 1, \ldots, m$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Gewichte symmetrisch sind, dass also $w_{m+1-i} = w_i$, für $i = 1, \ldots, m$, gilt.

(c) Man zeige für diesen Spezialfall, dass die Newton-Cotes Formeln mit ungerader Anzahl Knoten $m = 2l + 1$ sogar Exaktheitsgrad $q = m$ haben.

Aufgabe 3.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Basierend auf der zusammengesetzten Trapezformel und der Simpsonformel soll ein adaptives Quadraturverfahren zur Berechnung von

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

implementiert werden. Die Idee eines adaptiven Verfahren ist es, die Schrittweite nur in solchen Bereichen zu verfeinern, in denen sich die Funktionswerte schnell ändern. Der Algorithmus soll rekursiv arbeiten: Zunächst wird für $h = (b-a)/2$ das Integral nach der Trapezformel T_2 und der Simpsonformel S_1 berechnet. Wird die Genauigkeit $|T_2 - S_1| \leq \texttt{tol}$ erreicht, wobei `tol` vorgegeben ist, so soll S_1 als Näherung für $I[f]$ verwendet werden und der Algorithmus soll abbrechen. Wird diese Genauigkeit nicht erreicht, so soll das Integrationsintervall und die Genauigkeit `tol` halbiert werden, und die oben beschriebene Methode zur Berechnung der Integrale $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wiederholt werden. Implementieren Sie den Algorithmus mit einer sich selbst rekursiv aufrufenden Funktion

```
[Q, AnzF] = QuadAdapt(f,tol,a,b),
```

wobei `a,b` die Integrationsgrenzen bezeichnen, `tol` die Toleranz und `f` die zu integrierende Funktion. In `Q` wird der Näherungswert für $I[f]$ und in `AnzF` die Anzahl der Funktionsauswertungen von f zurückgegeben.

Wenden Sie Ihre Funktion auf $a = 0.1$, $b = 3$ und $f(x) = x^{-1}$ sowie $tol = \begin{pmatrix}10^{-1} & 10^{-2} & \ldots & 10^{-5}\end{pmatrix}^T$ an. Sei $[\texttt{Q(i)}, \texttt{AnzF}(i)] = \texttt{QuadAdapt}(f, a, b, tol(i))]$ für $i = 1, .., 5$. Approximieren Sie dann das Integral nochmal mittels der zusammengesetzten Trapezformel für $\texttt{AnzF}(i)$ Stützstellen und plotten Sie (in einen gemeinsamen Plot mit logarithmierten Achsen) die Fehler $|\texttt{Q} - \int_a^b f(x)dx|$ gegen `AnzF` und $|\texttt{Q}' - \int_a^b f(x)dx|$ gegen `AnzF` (wobei $\texttt{Q}'$ die Ausgabe der zusammengesetzen Trapezformel ist).

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 05.11.2019 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 05.11.2019 um 10:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**