

Seminar über nicht-archimedische Geometrie

im WS 2019/20

Programm

Wir benutzen als primäre Quelle das Skript von Sophie Morel ([Mor19]).

Vorbesprechung und Einführung (14.10.19) Stefan Rettenmayr

In einer kurzen Einführung in die Theorie der adischen Räume werden wir den Begriff der Bewertung verallgemeinern und die Korrespondenz zwischen den Bewertungen eines Körpers und seinen Bewertungsringen erklären ([Mor19, I.1.1]).

1. Vortrag (21.10.19): Das Bewertungsspektrum

Erklären Sie den Rang einer Bewertung ([Mor19, I.1.3]) und die von einer Bewertung erzeugte Topologie ([Mor19, I.1.5]). Fassen Sie die algebraischen Hilfsresultate aus [Mor19, I.1.2 und I.1.4] zusammen und beweisen Sie [Mor19, Theorem I.1.5.4] über mikrobische Bewertungen. Definieren Sie außerdem den Riemann-Zariski-Raum ([Mor19, Definition I.1.6.2]) und präsentieren Sie Abschnitt [Mor19, I.2.1] über das Bewertungsspektrum bis einschließlich [Mor19, Remark I.2.1.8].

2. Vortrag (28.10.19): Spektrale Räume

Definieren Sie spektrale Räume ([Mor19, I.2.2]), motiviert durch die topologischen Eigenschaften des Spektrums eines Rings ([Mor19, Ende von I.2.1]). Beweisen Sie mithilfe der konstruierbaren Topologie ([Mor19, I.2.3]) die Spektralität des Bewertungsspektrums ([Mor19, Theorem I.2.6.1]).

3. Vortrag (04.11.19): Die Spezialisierungsrelation

Erklären Sie die Spezialisierungsrelation auf dem Bewertungsspektrum ([Mor19, I.3]). Die Hauptaussage ist die Zerlegung einer beliebigen Spezialisierung in eine horizontale und eine vertikale Spezialisierung ([Mor19, Theorem I.3.4.3]).

4. Vortrag (18.11.19): Huber- und Tate-Ringe I

Fassen Sie die Grundlagen über topologische Ringe zusammen (siehe z. B. [Wed12, 5.1, 5.2 und 5.4]). Erklären Sie Huber- und Tate-Ringe ([Mor19, II.1.1]), potenzbeschränkte und topologisch nilpotente Elemente ([Mor19, II.1.2]) sowie adische Abbildungen ([Mor19, II.1.3]). Geben Sie dabei einige Beispiele an ([Mor19, II.1.4]). Wichtige Eigenschaften sind [Mor19, Corollary II.1.1.8], [Mor19, Proposition II.1.2.4] und [Mor19, Proposition II.1.3.3].

5. Vortrag (25.11.19): Huber- und Tate-Ringe II

Definieren Sie die Kompletterung eines Huber-Rings und beweisen Sie [Mor19, Corollary II.3.1.9] sowie [Mor19, Proposition II.3.1.12]. Präsentieren Sie außerdem die Abschnitte [Mor19, II.3.3] und [Mor19, II.3.4] über Konstruktionen mit Polynomringen bzw. Lokalisierungen.

6. Vortrag (02.12.19): Stetige Bewertungen

Beweisen Sie [Mor19, Theorem I.4.2.4] und folgern Sie daraus die Spektralität des stetigen Bewertungsspektrums eines Huber-Rings ([Mor19, Theorem II.2.2.1 und Corollary II.2.2.3]).

7. Vortrag (09.12.19): Das adische Spektrum I

Konstruieren Sie das adische Spektrum eines Huber-Paars ([Mor19, Definition III.2.1]) und beweisen Sie hierfür [Mor19, Proposition III.1.4]. Erklären Sie das Beispiel der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe ([Mor19, III.5.2]). Definieren Sie außerdem analytische Punkte ([Mor19, II.2.4]) und beweisen Sie [Mor19, Proposition III.1.5 (i)] sowie [Mor19, Proposition III.2.5].

8. Vortrag (16.12.19): Das adische Spektrum II

Beweisen Sie [Mor19, Theorem III.3.1] und erklären Sie anschließend, wie sich das adische Spektrum unter Quotientenbildung, Kompletterung und Lokalisierung verhält ([Mor19, III.4.1 bis III.4.3]). Beweisen Sie außerdem [Mor19, Corollary III.4.4].

9. Vortrag (13.01.20): Die Strukturprägarbe und adische Räume

Geben Sie eine Einführung in die Theorie der Garben (siehe z. B. [Vak17, Chapter 2]) und konstruieren Sie die Strukturprägarbe auf einem adischen Spektrum ([Mor19, III.6.1 und III.6.2]). Beweisen Sie [Mor19, Proposition III.6.3.1] und [Mor19, Proposition III.6.4.4]. Definieren Sie anschließend adische Räume ([Mor19, III.6.5]) und präsentieren Sie [Mor19, Theorem IV.1.1.5] ohne Beweis.

10. Vortrag (20.01.20): Perfektoide Tate-Ringe I

Definieren Sie perfektoide Tate-Ringe ([Mor19, V.1.1]) und erklären Sie das Tilting ([Mor19, V.1.2]). Geben Sie einige Beispiele an.

11. Vortrag (27.01.20): Perfektoide Tate-Ringe II

Führen Sie den Ring der Witt-Vektoren ein ([Mor19, V.1.3], siehe auch z. B. [Bos13, Kapitel 4.10]) und erklären Sie das Untilting ([Mor19, V.1.4]). Skizzieren Sie den Beweis von [Mor19, Theorem V.1.6.1].

12. Vortrag (03.02.20): Perfektoide Räume und das Almost-Purity-Theorem

Definieren Sie perfektoide Räume ([Mor19, V.2]), erklären Sie die Aussage des Almost-Purity-Theorems ([Mor19, Theorem V.3.1.3], [Sch11, Theorem 7.9]) und skizzieren Sie den Beweis.

Literatur

[Bos13] Siegfried Bosch: Algebra. Springer-Verlag, 8. Auflage.

- [Mor19] Sophie Morel: Adic Spaces. https://web.math.princeton.edu/~smorel/adic_notes.pdf
- [Sch11] Peter Scholze: Perfectoid Spaces. Publ. Math. IHES 116 (2012) 245-313
- [Vak17] Ravi Vakil: Foundations of Algebraic Geometry. <http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf>
- [Wed12] Torsten Wedhorn: Adic Spaces. <https://wwwf.imperial.ac.uk/~buzzard/docs/AdicSpaces.pdf>