GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Quadraturverfahren
SS 2018
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 5

Abgabe bis Mittwoch, 20.06., 11:45 Uhr

Aufgabe 12: [Bernoulli-Polynome]

Die Bernoulli-Polynome spielen eine wichtige Rolle bei der Euler-MacLaurin Darstellung des Quadraturfehlers der Trapezsumme. Sie sind rekursiv definiert über

$$b_0(t) := 1,\ b_k'(t) := b_{k-1}(t) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, ... \quad \text{wobei} \quad \int_0^1 b_k(t)\, dt = 0 \ .$$

(a) Benutzen Sie die bekannte Fourier-Reihe

$$t - 1/2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{\pi n} \quad \text{für } 0 < t < 1$$

und die Eigenschaft, dass Fourier-Reihen gliedweise integriert werden dürfen, um zu zeigen, dass für $k = 1, 2, 3, ...$ und für $0 \leq t \leq 1$ gilt:

$$b_{2k}(t) = (-1)^{k+1} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2k}} \quad \text{und} \quad b_{2k+1}(t) = (-1)^{k+1} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2k+1}} \ .$$

(b) Zeigen Sie, dass $ze^{zt}/(e^z - 1)$ die erzeugende Funktion der skalierten Bernoulli-Polynome ist, d.h.

$$ze^{zt}/(e^z - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) z^k$$

und dass diese Potenzreihe für alle (komplexen) z mit $|z| < 2\pi$ konvergiert.

(c) Setzen Sie in $t = 0$ und $z = 2x$ in Teilaufgabe (b) und zeigen Sie damit, dass

$$2x/(e^{2x} - 1) = x \cdot \cosh x / \sinh x - x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(0) 2^k x^k$$

gilt. Folgern Sie weiter, dass

$$\cosh x = \frac{\sinh x}{x} \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}(0) 4^k x^{2k} \ .$$

(d) Leiten Sie durch Koeffizienten-Vergleich die Rekursion $b_0(0) = 1$ und

$$b_{2k}(0) + b_{2k-2}(0)/4 \cdot 3! + b_{2k-4}(0)/4^2 \cdot 5! + ... + b_2(0)/4^{k-1} \cdot (2k-1)! = 2k/4^k \cdot (2k+1)!$$

für $k = 1, 2, 3, ...$ her.