

### Übung 3

Abgabe bis Mittwoch, 23.05., 11:45 Uhr

#### Aufgabe 7: [Gauß-Quadratur]

Betrachten sie das gewichtete Integral

$$I_w(f) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx .$$

- (a) Für die angegebene Gewichtsfunktion sind die Tschebyscheff-Polynome orthogonal. Ermitteln sie die Stützstellen und Gewichte der entsprechenden  $N$ -Punkt Gauß-Quadraturformeln.
- (b) Welchen polynomialen Exaktheitsgrad haben diese Quadraturformeln?

#### Aufgabe 8: [Adaptive Quadratur]

Zur numerischen Berechnung des Integrals

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

betrachte man die Simpsonregel

$$S = \frac{(b-a)}{6} \cdot \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

sowie die Simpsonsumme

$$T = \frac{(b-a)}{12} \cdot \left( f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right)$$

- (a) Geben sie den Fehler der kombinierten Regel  $U = T + \frac{T-S}{15}$  an.
- (b) Ein adaptives Quadraturverfahren verfeinere das Integrationsgebiet  $[a, b]$  falls der Integrationsfehler zu groß ist. Warum eignet sich der Wert  $|T - S|$  als Schätzung für den Integrationsfehler?
- (c) Wir wollen nun  $[a, b]$  in zwei Hälften  $[a, (a+b)/2]$ ,  $[(a+b)/2, b]$  verfeinern, falls

$$|T - S| > \varepsilon \cdot (b - a)$$

und die beiden Teilintervalle separat integrieren. Dieser Vorgang wird rekursiv weitergeführt, falls der Fehler in dem jeweiligen Teilintervall immer noch zu groß ist. Integrieren sie die Funktion  $f(x) = \sqrt{|x|}$  im Intervall  $[-1, 1]$  auf diese Weise adaptiv für  $\varepsilon = 0.01$ . Verwenden sie jeweils  $U$  als endgültige Näherung der Teilintegrale.

- (d) Schreiben sie ein Matlab- oder Scilab-Programm `adaptquad(f, a, b, eps)`, das eine gegebene Funktion  $f$  im Intervall  $[a, b]$  adaptiv mit Fehlerschranke  $\varepsilon$  mit dem obigen Algorithmus integriert. Testen sie das Programm anhand der Funktion  $f(x) = \arctan(|x|)$  im Intervall  $[-3, 3]$ . Plotten sie in einem doppelt logarithmischen Plot die Zahl der Punkte gegen den Quadraturfehler für die Fehlerschranken  $\varepsilon = 4^{-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 20$ , und bestimmen sie so die Konvergenzrate des Verfahrens.