Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
7. Juni 2018

Dr. Tobias Schedlmeier
Max Bieri
Markus Rennig

Seminar im Sommersemester 2018

Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Das Seminar findet ab der zweiten Vorlesungswoche (KW16) wöchentlich Montags von 12 bis 14 Uhr in Raum 901 in der Robert–Mayer–Straße 10 statt. Die Vorträge sollen jeweils 85 Minuten dauern.

Literatur: Das Seminar orientiert sich an [Ser72] und [Ser77], der deutschen bzw. englischen Übersetzung von [Ser67]. Die Grundlagen finden sich auch in [FH91] und dem darauf basierenden Vorlesungsskript [Möl13]. Einen langsamen Einsteig mit Beispielen liefert [JL01].

1. *Grundlagen der Darstellungstheorie*

Definition von *lineare Darstellung, Grad einer Darstellung und isomorphe Darstellung*. Beispiele wie die *Permutationsdarstellung*. *Teildarstellungen* und die Existenz ihres Komplements. *Irreduzible Darstellungen*: Jede Darstellung is eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

Literatur: [Ser72, §1], [FH91, §1], [Möl13, §3], [Kow11, §2.1]

2. *Schurs Lemma und Satz von Maschke*

Definition des Tensorprodukts zweier Darstellungen und die Beschreibung durch Matrizen. Beweis von Schurs Lemma und dessen Konsequenzen. Beweis des Satzes von Maschke (ohne Charaktere).

Literatur: [Ser72, §1.5, §2.2], [FH91, §1], [Möl13, §3], [Kow11, §2.1, §4.1], [JL01, §8 – 9]

3. *Charaktere*

Definition eines *Charakters* sowie die ersten Rechenregeln [JL01, Prop. 13.9]. Irreduzibilitätskriterium für lineare Darstellungen. Orthogonalität von Charakteren zu irreduziblen Darstellungen. Charaktertafeln und Orthogonalitätsrelationen [JL01, Thm 16.4].

Literatur: [Ser72, §2.1 – 2.3], [FH91, §1 – 2], [Möl13, §4.1], [JL01, §13 – 16]

4. *Charaktere und Zerlegung von Darstellungen*

Kerne von Darstellungen sind durch Charaktere bestimmt [JL01, Thm 13.11]. Zerlegung der regulären Darstellung und *Klassenfunktionen*. Beweis, dass die irreduziblen Charaktere eine Orthonormalbasis des Vektorraums der Klassenfunktionen bilden. Anzahl der irreduziblen Darstellungen und Konsequenzen für abelsche Gruppen.

Literatur:[JL01, §13] [Ser72, §2.4 – 2.5]

5. *Zerlegung von Darstellungen II*

Abschätzung für den *Grad* einer irreduziblen Darstellung von einer Gruppe mit einer abelschen Untergruppe. Konstruktion der *kanonischen Zerlegung*. Die Darstellungen des direkten Produkts zweiter Gruppen.

Literatur: [Ser72, §2.4 – 3.2], [Ser77, §2.4 – 3.2]

6. *Charaktertafeln und Beispiele*

Beispiele von Charaktertafeln. Unter Anderem der zyklischen Gruppen, der Diedergruppen, der alternierenden Gruppen A_4 und der symmetrischen Gruppen S_4.

Literatur: [Ser72, §5] [Col90, S.54 ff.], [Möl13, §4.2], [Kow11, §4.6], [JL01, §18]

7. *Gruppenringe und Ganzheit von Charakteren*

Definition der Gruppenalgebra $K[G]$. Zerlegung von $\mathbb{C}[G]$ als Produkt von Matrizenalgebren.Definition algebraisch ganzer Zahlen; Ganzheit von Charakteren und deren Folgerungen. [JL01, Cor 22.4, 22.10]

Literatur: [Ser72, §6], [Col90, §1.2], [Möl13, §5.2 – 5.3], [JL01, §6, §22, §25 – 28]

8. *Induzierte Darstellungen I*

Definition von induzierten Darstellungen und Beispiele, Existenz und Eindeutigkeit. Induzierte Klassenfunktion und Charakter einer induzierten Darstellung. Frobenius-Reziprozität. Einschränkung auf Untergruppen

Literatur: [Ser72, §7 – 8], [Ser77, §3.3] [FH91, §3], [Möl13, §4.3], [AB12, §6.16]

9. *Induzierte Darstellungen II*

Mackeys Irreduzibilitätskriterium. Grad von irreduziblen Darstellungen einer Gruppe mit abelschem Normalteiler. Semidirekte Produkte und deren Darstellungen. Überauflösbare Gruppen und deren Darstellungen.

Literatur: [Ser72, §7 – 8], [FH91, §3], [Möl13, §4.3]

10. *Satz von Artin und Anwendungen der Induzierte Darstellungen*

Beweis des Satzes von Artin. Beweis der Existenz von p-Sylow Gruppen mit Hilfe der Darstellungstheorie

Literatur: [Ser72, §9], [Kow11, §4.8.2]

11. *Burnsides-pq-Theorem*

Beweis von Burnsides Theorem, dass jede Gruppe der Ordnung $p^a q^b$ mit p, q prim und $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ auflösbar ist, mithilfe der Darstellungstheorie. Auch, wo der Beweis für die altenierende Gruppe A_5 der Ordnung $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ schiefgeht.

Literatur: [JL01, §31], [Col90, §2.2], [Kow11, §4.7.2]

12. *Satz von Brauer*

Beweis des Satzes von Brauer: Jeder Charakter einer endlichen Gruppe G ist eine ganzzahlige Linearkombination von Charakteren, die von Charakteren elementarer Untergruppen induziert werden.

Literatur: [Ser72, §10]

Literatur

[AB12] Jonathan L Alperin and Rowen B Bell. *Groups and representations*, volume 162. Springer Science & Business Media, 2012.

[Col90] M. J. Collins. *Representations and characters of finite groups*, volume 22 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[JL01] Gordon James and Martin Liebeck. *Representations and characters of groups*. Cambridge University Press, New York, second edition, 2001.

[Kow11] Emmanuel Kowalski. *Representation theory*, Vorlesungsskript, `https://people.math.ethz.ch/~kowalski/representation-theory.pdf`, 2011.

[Möl13] Martin Möller. *Darstellungstheorie*, Vorlesungsskript, `http://www.uni-frankfurt.de/50679798/darstellungstheorie.pdf`, 2013.

[Ser67] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris, 1967.

[Ser72] Jean-Pierre Serre. *Lineare Darstellungen endlicher Gruppen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1972. In deutscher Sprache aus dem französischen übersetzt und herausgegeben von Günter Eisenreich.

[Ser77] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.