GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

13. Übungsblatt (erschienen am 24.01.2017)

Aufgabe 13.1 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Forderung um eine Constraint Qualification handelt:

$$g_i \text{ ist konkav für alle } i \notin I_x,\ h \text{ ist affin linear.}$$

Dabei nennen wir eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ affin linear, wenn Sie sich schreiben lässt als $h(x) = Ax + b$, mit $A \in \mathbb{R}^{p\times n},\ b \in \mathbb{R}^p$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konkav, falls $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0, 1]$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.16.

Aufgabe 13.2 (Votieraufgabe)
Gegeben seien die Funktionen $f(x) := -x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$, $g(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4$ und $h(x) := x_1 + x_2 + x_3 - 3$, das zugehörige Optimierungsproblem

$$\min_{x\in X} f(x) \text{ mit } X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\},$$

sowie der Punkt $x^\star = (1, 1, 1)^\intercal$. Bestimmen Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass das Triple $(x^\star, \lambda, \mu)$ die KKT-Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 13.3 (Votieraufgabe)
Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B \in \mathbb{R}^{n\times p},\ c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $d \in \mathbb{R}^n$ mit $A^\intercal d \leq 0$ und $B^\intercal d = 0$ gilt $c^\intercal d \leq 0$.

(ii) Es gibt $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u \geq 0$ und $v \in \mathbb{R}^p$ mit $c = Au + Bv$.

Aufgabe 13.4 (Votieraufgabe)
Seien zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und der Lagrange-Multiplikator $\mu \in \mathbb{R}^p$ gegeben. Dann ist

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R},\ L(x,\mu) := f(x) + \mu^\intercal h(x)$$

die zugehörige Lagrange-Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F(x,\mu) := \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,\mu) \\ h(x) \end{pmatrix}$$

stetig differenzierbar ist mit

$$F'(x,\mu) = \begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(x,\mu) & \nabla h(x) \\ \nabla h(x)^\intercal & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.5 (Programmieraufgabe zum Votieren)
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [fz,z,μ] = Lagrange_Newton(f,h,grad_h,grad_L,Hess_L,z0,μ0)
```

welche das Lagrange-Newton-Verfahren (vgl. Algorithmus 12 der Vorlesung) realisiert. Testen Sie ihre Funktion, indem Sie numerisch das Optimierungsproblem

$$f(x) \to \min! \quad \text{u.d.N. } h(x) = 0$$

lösen, mit $f(x,y) = 2(x^2 + y^2 - 1) - x$ mit $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 31.01.2017 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 31.01.2017 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt13_1617:"**.