GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

12. Übungsblatt (erschienen am 17.01.2017)

Aufgabe 12.1 (Votieraufgabe)
Gegeben seien die Mengen

$$X_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2,\, x \geq 0\}, \quad X_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \sqrt{x},\, x \geq 0\},$$

$$X_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x),\, x \geq 0\}, \text{ mit } f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

Zeichnen Sie die Tangentialkegel $T(X_1, (1,1))$, $T(X_2, (0,0))$ und $T(X_3, (1,0))$.

Aufgabe 12.2 (Votieraufgabe)
Beweisen Sie: Sei die Menge $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in X$ ein Häufungspunkt von X, dann ist $T(X,x) \neq \emptyset$.

Aufgabe 12.3 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Zeigen Sie die Aussage von Beispiel 3.20 der Vorlesung: Die Menge

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid\ -1 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid\ (x_1+1)^3 \geq x_2,\ x_1 \leq 1,\ x_2 = 0\}$$

lässt sich beschreiben durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad h(x) = x_2$$

aber auch durch

$$\tilde{g}(x) = \begin{pmatrix} x_2 - (x_1+1)^3 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}(x) = x_2.$$

Zeigen Sie, dass für $\bar{x} = (-1, 0)^\intercal \in X$ gilt

$$T(X, \bar{x}) = T_l(g, h, \bar{x}) \subsetneq T_l(\tilde{g}, \tilde{h}, \bar{x}),$$

und stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar.

Aufgabe 12.4 (Programmieraufgabe zum Votieren)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $X := [l_1, u_1] \times \cdots \times [l_n, u_n]$, mit unteren Schranken $l_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und oberen Schranken $u_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mit $l_i < u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Wir betrachten das zugehörige Optimierungsproblem

$$\min_{x \in X} f(x).$$

Die Projektion auf X ist bei unserer Wahl von X gegeben durch $(\mathrm{Proj}_X[x])_i = \begin{cases} l_i, \text{ falls } x_i < l_i, \\ x_i, \text{ falls } x_i \in [l_i, u_i], \\ u_i, \text{ falls } x_i > u_i. \end{cases}$

Damit lässt sich das *Projizierte Gradientenverfahren* formulieren:

Algorithm 1 Projiziertes Gradientenverfahren

Gegeben: Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Armijo-Parameter $\beta \in (0,1)$ und $\gamma \in (0,1)$
for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $\|x_k - \mathrm{Proj}_X[x_k - \nabla f(x_k)]\| = 0$ **then**
    STOP
  else
    $s_k := \frac{1}{\beta}$
    repeat
      $s_k := \beta s_k$
      $x_{k+1} := \mathrm{Proj}_X[x_k - s_k \nabla f(x_k)]$
    until $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma \nabla f(x_k)^\intercal (x_k - x_{k+1})$
  end if
end for
return $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [fz,z] = Proj_Grad(f,grad_f,z0,β,γ)
```

welche Algorithmus 1 realisiert und testen Sie die Funktion am Beispiel $f(x, y) = x^2 + 100y^2$, $X = [-2, -1] \times [-2, 2]$, sowie $z_0 = (10, 1)$, $\beta = 0.5$ und $\gamma = 0.01$. Visualisieren Sie ihre Ergebnisse.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 24.01.2017 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 24.01.2017 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt12_1617:"**.