GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

11. Übungsblatt (erschienen am 10.01.2017)

Aufgabe 11.1 (Votieraufgabe)
Wie lauten die Normalformen der folgenden linearen Programme? Welche von ihnen sind lösbar bzw. eindeutig lösbar? (Eine Veranschaulichung im $\mathbb{R}^2$ ist nützlich.)

(a) $\min x_1 + x_2$ u.d.N. $x_1 + x_2 \geq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

(b) $\max x_1 + x_2$ u.d.N. $x_1 + x_2 \geq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

(c) $\max x_1 + x_2$ u.d.N. $x_1 + x_2 \geq 3,\ x_1 - 2x_2 \geq -1,\ 2x_1 - x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Hinweis: Bezüglich der Lösbarkeit ist eine grafische Argumentation ausreichend.

Aufgabe 11.2 (Votieraufgabe)
Die Auszahlungsmatrix eines Spieles sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, ohne die optimalen Strategien der Spieler zu bestimmen, dass das Spiel unfair ist, d.h. dass Folgendes gilt

$$\min_{\substack{x\geq 0,\\ e^\intercal x=1}} \max_{\substack{y\geq 0,\\ e^\intercal y=1}} y^\intercal Ax \neq 0,$$

mit $e = (1,1,1)^\intercal$.
Hinweis: Zeigen Sie $\max_{i=1,2,3}(Ax)_i \geq \frac{1}{3}e^\intercal Ax$, schätzen Sie dann geschickt ab und unterscheiden Sie anschließend die Fälle $x_2 \in [0, 1-\varepsilon]$ und $x_2 \in [1-\varepsilon, 1]$ mit geeignetem $\varepsilon \in (0,1)$.

Aufgabe 11.3 (Schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Es seien $m, n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Die Menge M, definiert durch

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\},$$

sei nicht leer. Zeigen Sie, dass M genau dann beschränkt ist, wenn es keinen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $y \neq 0,\ y \geq 0$ und $Ay = 0$.

Aufgabe 11.4 (Programmieraufgabe zum Votieren)
Betrachten Sie nochmals das Spiel aus Aufgabe 2 mit Auszahlungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [x,y] = Strategie(A,b,c)
```

welche für die beiden Spieler die jeweils optimale Strategie bestimmt.
Hinweis: Formen Sie die beiden Probleme in lineare Optimierungsprobleme in Normalform um und verwenden Sie das Simplexverfahren.

Aufgabe 11.5 (Multiple Choice)[2.5 Punkte]
Gegeben Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^7 \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 7}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Kreuzen Sie an, bei welchem der folgenden Vektoren es sich um einen Basisvektor von K handelt.

$x_1 = (2,1,3,-2,0,0,0)^\mathsf{T}$ wahr ☐ falsch ☐

$x_2 = (1,0,3,0,1,0,0)^\mathsf{T}$ wahr ☐ falsch ☐

$x_3 = (1,0,3,0,3,1,0)^\mathsf{T}$ wahr ☐ falsch ☐

$x_4 = (0,0,2,2,1,0,3)^\mathsf{T}$ wahr ☐ falsch ☐

$x_5 = (2,1,1,0,2,0,2)^\mathsf{T}$ wahr ☐ falsch ☐

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 17.01.2017 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 17.01.2017 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt11_1617:"**.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**.