

10. Übungsblatt (erschienen am 20.12.2016)

Aufgabe 10.1 (Rettet Weihnachten!)

Sei die Abbildung g und die Matrix M gegeben durch

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, \lambda) \mapsto \lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}, \quad M = \begin{pmatrix} 0.1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 0.9 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Optimierungsaufgabe, das Maximum von g unter den Nebenbedingungen

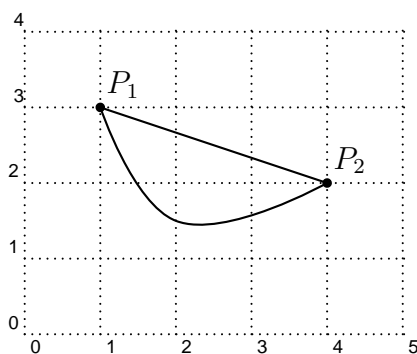
$$\lambda \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^\top x = 1 \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq Mx$$

zu bestimmen.

- Schreiben Sie das Problem in eine lineare Optimierungsaufgabe in Normalform um.
- Lösen Sie obiges Optimierungsproblem numerisch, indem Sie das in Bemerkung 3.9 beschriebene Verfahren implementieren und verwenden.

Aufgabe 10.2 (Modellierung)

Es soll das Problem der **Brachistochrone** betrachtet werden. Bei diesem von Johann Bernoulli gestellten Problem ist eine Kurve gesucht, die zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ mit $x_1 < x_2$ und $y_1 \geq y_2$ so verbindet, dass eine Kugel nur unter der Einwirkung der Schwerkraft ohne Reibung entlang der Kurve in kürzestmöglicher Zeit von P_1 nach P_2 kommt.



Sei nun $u : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $u(x_1) = y_1$ und $u(x_2) = y_2$. Dann lässt sich die Laufzeit der Kugel durch

$$T(u) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{2g(u(x_1) - u(x))}} dx$$

berechnen, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichne. Bei dem Brachistochronenproblem ist demnach eine Funktion u gesucht, welche das Funktional T minimiert, also Lösung ist von

$$\min_{u \in U} T(u)$$

mit

$$U = \{u \in C^1 \mid u(x_1) = y_1, u(x_2) = y_2, 2g(u(x_1) - u(x)) > 0, \forall x \in [x_1, x_2]\}.$$

Modellieren Sie dieses Optimierungsproblem und lösen Sie es numerisch.

Aufgabe 10.3 (Schriftliche und Programmieraufgabe)[7 Punkte]

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachte

$$Ax = b. \tag{1}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Matrix $A' \in \mathbb{R}^{m' \times n}$ mit vollem Zeilenrang und $b' \in \mathbb{R}^{m'}$ zu bestimmen, so dass

$$A'x = b' \tag{2}$$

ein äquivalentes Gleichungssystem ist (d.h. die Lösungsmengen von (1) und (2) übereinstimmen).

Überlegen Sie sich Ihr Vorgehen zunächst rigoros (schriftliche Aufgabe) und schreiben Sie dann eine Funktion (Programmieraufgabe)

$$\text{function [A',b']} = \text{Reduktion}(A,b),$$

die das Gewünschte leistet.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die QR-Zerlegung für A verwenden (siehe Skript zu Einführung in die Numerik, Bemerkung 2.39):

$$Q^*AE = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := R$$

wobei E eine Permutationsmatrix, Q eine unitäre Matrix und R_1 eine obere Dreiecksmatrix ist. Die QR-Zerlegung ist bereits mittels der Funktion $[Q, R, E] = qr(A)$ in Matlab implementiert.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 10.01.2017 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 10.01.2017 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Opt10_1617:**".
- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt.**