

9. Übungsblatt (erschienen am 13.12.2016)

**Aufgabe 9.1 (Votieraufgabe)**

Beweisen Sie Lemma 2.62 aus der Vorlesung: Ist  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zweimal stetig differenzierbar, so auch  $\Phi(x) := \frac{1}{2} \|F(x)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m F_i(x)^2$  und es gilt:

- (a)  $\nabla \Phi(x) = F'(x)^\top F(x)$ .  
 (b)  $\nabla^2 \Phi(x) = F'(x)^\top F'(x) + \sum_{i=1}^m F_i(x) \nabla^2 F_i(x)$ .

**Aufgabe 9.2 (schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]**

In dieser Aufgabe soll für ein  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  das folgende **globalisierte Quasi-Newton-Verfahren mit BFGS-Aufdatierung** betrachtet werden:

---

**Algorithm 1** Globalisiertes BFGS-Verfahren

---

```

1: Gegeben: Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \gamma < 1$  und  $\gamma < \eta < 1$ 
2: Gegeben: Symmetrische, positiv definite Startmatrix  $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 
3: for  $k = 0, 1, 2, \dots$  do
4:   if  $\nabla f(x_k) = 0$  then
5:     STOP
6:   else
7:      $d_k := -B_k \nabla f(x_k)$ 
8:     Bestimme  $s_k > 0$  mithilfe der Powell-Wolfe-Regel
9:      $x_{k+1} := x_k + s_k d_k$ 
10:  end if
11:  if  $\nabla f(x_{k+1}) = 0$  then
12:    STOP
13:  else
14:     $\tilde{d}_k := x_{k+1} - x_k$ ,  $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ 
15:     $B_{k+1} := B_k + \frac{(\tilde{d}_k - B_k y_k) \tilde{d}_k^\top + \tilde{d}_k (\tilde{d}_k - B_k y_k)^\top}{\tilde{d}_k^\top y_k} - \frac{(\tilde{d}_k - B_k y_k)^\top y_k}{(\tilde{d}_k^\top y_k)^2} \tilde{d}_k \tilde{d}_k^\top$ 
16:  end if
17: end for
18: return  $x_0, x_1, x_2, \dots$ 

```

---

Sei  $B_k$  positiv definit. Zeigen Sie das folgende eingeschränkte Konvergenzresultat:

- (a) Sei die Bestimmung einer Powell-Wolfe-Schrittweite  $s_k > 0$  erfolgreich. Dann gilt  $y_k^\top \tilde{d}_k > 0$  und  $B_{k+1}$  ist positiv definit.  
 (b) Sei  $f$  nach unten beschränkt. Dann ist Algorithmus 2 durchführbar. Sei außerdem  $\kappa(B_k)$  die Konditionszahl der Matrix  $B_k$  gleichmäßig beschränkt, so ist das Verfahren global konvergent im Sinne von Satz 2.29.

### Aufgabe 9.3 (Votieraufgabe)

In dieser Aufgabe soll eine Variante des **Levenberg-Marquardt-Verfahrens** (Algorithmus 10) behandelt werden, wobei der Trust-Region-Radius  $r$  explizit kontrolliert wird. Das resultierende Verfahren lautet:

---

**Algorithm 2** Modifiziertes Levenberg-Marquardt-Verfahren

---

```
1: Gegeben: Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $0 < \gamma < 1$ 
2: for  $k = 0, 1, 2, \dots$  do
3:   if  $F'(x_k)^\top F(x_k) = 0$  then
4:     STOP
5:   end if
6:    $r = 1$ 
7:   repeat
8:     Bestimme  $x_{k+1}$  als Minimierer von  $\|F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)\| \rightarrow \min!$  u.d.N.  $\|x - x_k\| \leq r$ 
9:      $\varepsilon := \frac{\|F(x_k)\|^2 - \|F(x_{k+1})\|^2}{\|F(x_k)\|^2 - \|F(x_k) + F'(x_k)(x_{k+1} - x_k)\|^2}$ 
10:    if  $\varepsilon \leq \gamma$  then
11:       $r := r/2$ 
12:    end if
13:  until  $\varepsilon > \gamma$ 
14: end for
15: return  $x_0, x_1, x_2, \dots$ 
```

---

Erklären Sie die Unterschiede zu Algorithmus 10 der Vorlesung und formulieren Sie die Zeile 8 als Pseudocode.

### Aufgabe 9.4 (Programmieraufgabe zum Votieren)

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [fz,z] = Globalisiertes_BFGS(f,grad_f,z0,B0,gamma,eta)
```

welche das Globalisierte BFGS-Verfahren aus Aufgabe 9.2 realisiert.

- (a) Wenden Sie die Funktion auf das Minimalflächenproblem aus Aufgabe 1.5 bzw. Aufgabe 5.5 an. Verwenden Sie den Randwert  $r(x, y) = \sin(xy\pi)$  sowie den Anfangswert  $u(x, y) = \sin(xy\pi)$   $(x, y) \in (0, 1)^2$ ,  $n = 50$  und  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Dabei ist  $\varepsilon$  als Abbruchtoleranz für die Norm des Gradienten zu verstehen. Verwenden Sie die Startmatrizen  $B_0 = \text{Id}$ ,  $B_0 = 10 \cdot \text{Id}$  und  $B_0 = 20 \cdot \text{Id}$ .
- (b) Visualisieren Sie ihre Ergebnisse. Vergleichen Sie die Resultate mit denen aus Aufgabe 8.3. Was können Sie schlussfolgern?

### Aufgabe 9.5 (Multiple Choice)[2 Punkte]

Kreuzen Sie an, für welche der folgenden Funktionen die Anwendung eines einzelnen Gauß-Newton-Schrittes für jeden Startwert einen globalen Minimierer von  $\frac{1}{2}\|F(x)\|^2$  liefert.

$F_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x^2/4 + 1)^\top$  wahr  falsch

$F_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto (x, x/2, x + 1)^\top$  wahr  falsch

$F_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (\sin(x), \cos(x))^\top$  wahr  falsch

$F_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax + b, A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = (0, 1, 1)^\top$  wahr  falsch

## Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 20.12.2016 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 20.12.2016 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Opt9\_1617:**".
- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt.**