GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

8. Übungsblatt (erschienen am 06.12.2016)

Aufgabe 8.1 (Votieraufgabe)

Zu einem Quasi-Newton-Verfahren sei die **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Aufdatierungsformel** (BFGS-Formel)

$$H_{k+1} := H_k + \frac{y_k y_k^\intercal}{y_k^\intercal d_k} - \frac{H_k d_k d_k^\intercal H_k^\intercal}{d_k^\intercal H_k d_k}$$

gegeben, wobei wieder $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ und $d_k := x_{k+1} - x_k$ gilt und die Startmatrix $H_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist. Zeigen Sie:

(a) Mit den Bedingungen $y_k^\intercal d_k \neq 0$ und $d_k^\intercal H_k d_k \neq 0$ erfüllen die BFGS-Matrizen H_k die Quasi-Newton-Bedingung (2.18).

(b) Gilt $y_k^\intercal d_k > 0$ und ist H_k positiv definit, so ist auch H_{k+1} positiv definit.

(c) Seien $B_k := H_k^{-1}$ die Inversen der BFGS-Matrizen und sei wieder $y_k^\intercal d_k > 0$ und ist H_k positiv definit. Rechnen Sie mittels Lemma 2.57 die Aufdatierungsformel

$$B_{k+1} := B_k + \frac{(d_k - B_k y_k) d_k^\intercal + d_k (d_k - B_k y_k)^\intercal}{d_k^\intercal y_k} - \frac{(d_k - B_k y_k)^\intercal y_k}{(d_k^\intercal y_k)^2} d_k d_k^\intercal$$

für die Inversen nach.
Hinweis: Die BFGS-Matrizen entstehen durch symmetrische Rang-2-Aufdatierungen der Form

$$H_{k+1} = H_k + \gamma_1 u_{k,1} u_{k,1}^\intercal + \gamma_2 u_{k,2} u_{k,2}^\intercal.$$

Aufgabe 8.2 (Multiple Choice)[1 Punkt]

In dieser Aufgabe sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $H_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Ist H_k positiv definit, so ist $d_k = -H_k^{-1}\nabla f(x_k)$ eine Abstiegsrichtung. wahr ☐ falsch ☐

(b) Gilt $\|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) - \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k)\| = o(\|x_{k+1} - x_k\|)$ so sind äquivalent:

   (i) $\|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) - H_k(x_{k+1} - x_k)\| = o(\|x_{k+1} - x_k\|)$.

   (ii) $\|(\nabla^2 f(x_k) - H_k)(x_{k+1} - x_k)\| = o(\|x_{k+1} - x_k\|)$. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 8.3 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
In der Vorlesung in Abschnitt 2.4.4 wurde folgende Methode zur Bestimmung der Matrizen H_k vorgestellt:

Beginnend mit einer symmetrischen Startmatrix $H_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wähle die weiteren Matrizen durch *Aufdatierung als symmetrische Rang-1-Modifikation*

$$H_{k+1} = H_k + \gamma_k u_k u_k^\mathsf{T},$$

wobei $\gamma_k \in \mathbb{R}$ und $u_k \in \mathbb{R}^n$ so zu bestimmen sind, dass H_{k+1} die Quasi-Newton-Bedingung (2.18) erfüllt. Sei außerdem $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ und $d_k := x_{k+1} - x_k$. Zeigen Sie: Mit der Bedingung $(y_k - H_k d_k)^\mathsf{T} d_k \neq 0$ ergibt sich in **eindeutiger** Weise die **Symmetrisch-Rang-1-Aufdatierungsformel** (SR1)

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y_k - H_k d_k)(y_k - H_k d_k)^\mathsf{T}}{(y_k - H_k d_k)^\mathsf{T} d_k}.$$

Aufgabe 8.4 (Programmieraufgabe zum Votieren)
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function[fz,z] = Quasi_Newton_BFGS(f,grad_f,z0,B0)
```

welche das Quasi-Newton-Verfahren mit BFGS-Aufdatierung (vgl. Algorithmus 7 der Vorlesung) realisiert.

(a) Wenden Sie die Funktion auf das Minimalflächenproblem aus Aufgabe 1.5 bzw. Aufgabe 5.5 an. Verwenden Sie den Randwert $r(x, y) = \sin(xy\pi)$ sowie den Anfangswert $u(x, y) = \sin(xy\pi)$
$(x, y) \in (0, 1)^2$, $n = 20$ und $\varepsilon = 10^{-10}$. Dabei ist ε als Abbruchstoleranz für die Norm des Gradienten zu verstehen. Verwenden Sie als Startmatrix einerseits die Identität $B_0 = \mathrm{Id}$ und andererseits die skalierte Identität $B_0 = \frac{1}{n}\mathrm{Id}$. Können Sie dieselben Tests auch für $n = 50$ durchführen?

(b) Visualisieren Sie ihre Ergebnisse. Vergleichen Sie die Resultate mit denen aus Aufgabe 5.5. Was können Sie schlussfolgern?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 13.12.2016 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 13.12.2016 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt8_1617:"**.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**.