GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

7. Übungsblatt (erschienen am 29.11.2016)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)
Gegeben sind die C^2-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und die Variablentransformation

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : y \mapsto Ay + b =: x$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^n$. Bezeichne $\hat{f}(y) = f(T(y))$ die auf y-Koordinaten transformierte Funktion f. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\nabla f(x) \neq 0$ und invertierbarer Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x)$. Weiter bezeichne x_g bzw. x_n das Ergebnis eines Gradienten- bzw. Newton-Schrittes zur Lösung des Problems $\min_{z\in\mathbb{R}^n} f(z)$ ausgehend von $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x_g = x - \nabla f(x), \qquad x_n = x - \nabla^2 f(x)^{-1}\nabla f(x).$$

Entsprechend sei y_g bzw. y_n das Ergebnis eines Gradienten- bzw. Newton-Schrittes für $\hat{f}$ ausgehend von $y = T^{-1}(x)$:

$$y_g = y - \nabla \hat{f}(y), \qquad y_n = y - \nabla^2 \hat{f}(y)^{-1}\nabla \hat{f}(y).$$

(a) Drücken Sie $\nabla \hat{f}(y)$ und $\nabla^2 \hat{f}(y)$ mit Hilfe von $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$, A und b aus.

(b) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren invariant unter der Transformation T ist, d.h. $T(y_n) = x_n$.

(c) Für welche Klasse von Matrizen A ist das Gradientenverfahren invariant unter der Transformation T, d.h. $T(y_g) = x_g$? Für welche nicht?

Aufgabe 7.2 (Multiple Choice)[1 Punkte]
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ sei ein lokales Minimum von f mit positiv definiter Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\hat{x})$.

(a) Es existiert ein $\delta > 0$, sodass $\hat{x}$ der einzige stationäre Punkt von f auf $B_\delta(\hat{x})$ ist.
wahr ☐ falsch ☐

(b) Es existieren δ, $\mu > 0$, sodass für alle $x \in B_\delta(\hat{x})$ gilt: $\lambda_{min}(\nabla^2 f(x)) \geq \mu$ und $\nabla^2 f(x)$ ist invertierbar mit $\|\nabla^2 f(x)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}$.
wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 7.3 (Votieraufgabe)
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ sei ein lokales Minimum von f mit positiv definiter Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\hat{x})$. Wir betrachten das **inexakte Newton-Verfahren** aus Satz 2.55 der Vorlesung. Dies entspricht Algorithmus 6 der Vorlesung, mit dem Unterschied, dass die Richtungen d_k so gewählt werden, dass $\|\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k) d_k\| \leq \eta_k \|\nabla f(x_k)\|$ erfüllt ist, mit $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einer Nullfolge positiver Zahlen, wobei $\max_{k\in\mathbb{N}} \eta_k$ klein genug sein soll. Zeigen Sie, dass dann ein $\delta > 0$ existiert, sodass gilt:

(a) Für jeden Startwert $x_0 \in B_\delta(\hat{x})$ liegen alle vom **inexakten Newton-Verfahren** erzeugten Iterierten in $B_\delta(\hat{x})$. Insbesondere ist für $\delta > 0$ klein genug $\nabla^2 f(x_k)$ an allen Iterierten x_k invertierbar und der Algorithmus ist durchführbar.

(b) Für jeden Startwert $x_0 \in B_\delta(\hat{x})$ terminiert der Algorithmus entweder an einem stationären Punkt $\hat{x}$ oder er erzeugt eine Folge, die superlinear gegen $\hat{x}$ konvergiert.

Aufgabe 7.4 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Sei

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{|x|}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f eine C^∞-Funktion ist mit $f'(0) = f''(0) = 0$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Minimierung von f für alle $0 < x_0 < \frac{1}{3}$ streng monoton fallend gegen $x^* = 0$ konvergiert. Begründen Sie ferner, dass keine lineare Konvergenz vorliegt.
Hinweis: Bringen Sie die Newtoniteration auf die Form $x_{k+1} = \varphi(x_k)x_k$. Was folgt daraus für den/die Häufungspunkt/e von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

Aufgabe 7.5 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [fz,z] = Newton(f,grad_f,Hess_f,z0)
```

welche das Newton-Verfahren für Optimierungsprobleme (vgl. Algorithmus 6) aus der Vorlesung realisiert.

Testen Sie ihre Funktion am Beispiel $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$. Verwenden Sie verschiedene Startwerte. Was können Sie beobachten?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 06.12.2016 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 06.12.2016 um 10:00 Uhr an **jahn@mathematik.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt7_1617:"**.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**.