Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

6. Übungsblatt (erschienen am 22.11.2016)

Aufgabe 6.1 (Votieraufgabe)

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge, die superlinear gegen $\bar{x}$ konvergiert. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - \bar{x}\|} = 1.$$

(In der Nähe der Lösung ist also $\|x_{k+1} - x_k\| \approx \|x_k - \bar{x}\|$.)

Aufgabe 6.2 (Votieraufgabe)

In der Vorlesung wurde bisher die Armijo-Regel und als Erweiterung die Powell-Wolfe-Regel behandelt. Eine weitere Abänderung der Armijo-Regel ist die **Goldstein-Regel**:

Dabei wird wie bei der Armijo-Regel die tatsächliche Abnahme der Zielfunktion mit der aus der linearen Approximation erwarteten Abnahme verglichen. Es wird dabei eine Schrittweite akzeptiert, wenn die tatsächliche Abnahme einerseits einen Bruchteil der erwarteten Abnahme (beispielsweise 10%) erreicht andererseits aber einen Anteil der erwarteten Abnahme (beispielsweise 90%) nicht übersteigt.

(a) Formulieren Sie diese beiden Bedingungen, wann eine Schrittweite akzeptiert wird, mathematisch.

(b) Schreiben Sie damit einen **Pseudocode**, welcher die Bestimmung einer Schrittweite über die Goldstein-Regel realisiert.

(c) Sei nun d eine Abstiegsrichtung der Zielfunktion f im Punkt x und f sei in Richtung d nach unten beschränkt, d.h.

$$\inf_{t\geq 0} f(x + td) > -\infty.$$

Beweisen Sie, dass Ihr Pseudocode aus Teilaufgabe **(b)** nach endlich vielen Schritten eine Schrittweite liefert, welche die Bedingungen aus Teilaufgabe **(a)** erfüllt. Ist f nach unten beschränkt und $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abstiegsrichtungen, so ist die durch die Goldstein-Regel erzeugte Schrittweitenfolge zulässig.

Aufgabe 6.3 (Multiple Choice)[1 Punkte]

(a) Eine Folge im $\mathbb{R}^n$, die bezüglich einer Norm superlinear konvergiert, konvergiert auch bezüglich jeder anderen Norm superlinear. wahr ☐ falsch ☐

(b) Die Folge $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ konvergiere superlinear gegen $\bar{x}$. Dann gilt: Für $\gamma \in (0, 1)$ konvergiert die Folge (x_k) linear mit Rate γ gegen $\bar{x}$. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 6.4 (Schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Wir betrachten wieder die **Armijo-Schrittweitenregel mit Aufweitung** aus Aufgabe 5.4 und eine Folge von Abstiegsrichtungen $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass eine Schrittweitenfolge, welche die Bedingungen

$$\begin{aligned} f(x_k + s_k d_k) &\leq f(x_k) + \gamma s_k \nabla f(x_k)^\intercal d_k \\ f\left(x_k + \frac{s_k}{\beta} d_k\right) &> f(x_k) + \gamma \frac{s_k}{\beta} \nabla f(x_k)^\intercal d_k \end{aligned}$$

erfüllt, zulässig ist.

Aufgabe 6.5 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [z,fz] = Gradient_Powell_Wolfe(f,∇f,z0,γ,η)
```

welche das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 3) realisiert. Wählen Sie dazu die Suchrichtungen $d_k = -2^{-k}\nabla f(x_k)$ und bestimmen Sie die Schrittweiten mit der Powell-Wolfe Schrittweitenregel (Algorithmus 4).

(a) Verwenden Sie diese MATLAB-Funktion um das globale Minimum von $f(x,y) = \frac{1}{8}(x^2 + y^2)$ zu bestimmen. Verwenden Sie dazu den Startwert $z_0 = [5, 5]$, $\gamma = 0.01$ und $\eta = 0.9$.

(b) Verwenden Sie nun zur Bestimmung der Schrittweite die Armijo-Schrittweitenregel (verwenden Sie weiterhin die Suchrichtungen $d_k = -2^{-k}\nabla f(x_k)$). Bestimmen Sie wieder das globale Minimum von $f(x,y) = \frac{1}{8}(x^2 + y^2)$. Verwenden Sie dazu $z_0 = [5, 5]$, $\beta = 0.5$ und $\gamma = 0.01$.

(c) Zeichnen Sie in zwei verschiedene Bilder jeweils die Höhenlinien der Funktion $f(x,y) = \frac{1}{8}(x^2 + y^2)$ (MATLAB-Befehl *contour*) und zusätzlich in das erste Bild die Folge der Iterierten aus Teilaufgabe **(a)** und in das zweite Bild die Folge der Iterierten aus Teilaufgabe **(b)**. Was können Sie beobachten?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 29.11.2016 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 29.11.2016 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt6_1617:"**.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**.