GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

4. Übungsblatt (erschienen am 08.11.2016)

Wir wollen im Theorieteil dieses Blattes das **Gradientenverfahren mit Minimierungsregel** betrachten. Dazu sei stets $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = c^\intercal x + \frac{1}{2} x^\intercal C x$, mit $c \in \mathbb{R}^n$ und $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit. Dann wählen wir als Suchrichtung $d_k = -\nabla f(x_k)$ und die Schrittweiten $s_k > 0$ werden bestimmt als

$$\min_{s \geq 0} f(x_k + s d_k).$$

Aufgabe 4.1 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie: $\hat{x} = -C^{-1}c$ ist das globale Minimum von f.

Aufgabe 4.2 (Votieraufgabe)

(a) Definiere $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(s) = f(x_k + s d_k)$. Zeigen Sie:

$$s_k = \frac{\|d_k\|^2}{d_k^\intercal C d_k}$$

ist das globale Minimum von φ.

(b) Sei x_k eine Iterierte mit $\nabla f(x_k) \neq 0$. Definiere $N_f(x_k) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) = f(x_k)\}$ die Niveaufläche durch $x_k \in \mathbb{R}^n$ (Höhenlinie in $\mathbb{R}^2$). Zeigen Sie:

$$d_k = -\nabla f(x_k) \text{ steht senkrecht auf } N_f(x_k),$$

in dem Sinne, dass $d_k^T \dot{\gamma}(0) = 0$ für alle stetig differenzierbaren Pfade $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma((-1, 1)) \subset N_f(x_k)$ und $\gamma(0) = x_k$.

Aufgabe 4.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Seien (x_k) und (s_k) Folgen, welche durch das Gradientenverfahren mit Minimierungsregel erzeugt wurden und sei $\hat{x} = -C^{-1}c$ das globale Minimum von f. Zeigen Sie folgende Fehlerabschätzung:

$$f(x_{k+1}) - f(\hat{x}) \leq \left(1 - \frac{1}{\kappa(C)}\right) \left(f(x_k) - f(\hat{x})\right),$$

mit $\kappa(C)$ der Kondition der Matrix C.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $f(x_{k+1}) = f(x_k) - s_k \|d_k\|^2 + \frac{s_k^2}{2} d_k^\intercal C d_k$ und verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4.4 (Multiple Choice)[1 Punkt]
In dieser Aufgabe sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

(a) Für jede vom Gradientenverfahren mit Armijo-Schrittweitenregel erzeugte Folge (x_k) gilt $\|\nabla f(x_{k+1})\| \leq \|\nabla f(x_k)\|$, $\forall k \in \mathbb{N}$. wahr ☐ falsch ☐

(b) Ist d_k im Punkt x_k eine Abstiegsrichtung und wird die Schrittweite s_k mit Hilfe der Minimierungsregel bestimmt, so gilt $\nabla f(x_k + s_k d_k)^\intercal d_k = 0$. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 4.5 (Programmieraufgabe zum Votieren)
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [z,fz] = Gradient_mit_Minimum(c,C,z0)
```

welche das Gradientenverfahren mit Minimierungsregel realisiert, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = c^\mathsf{T} x + \frac{1}{2} x^\mathsf{T} C x$, mit $c \in \mathbb{R}^2$ und $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ positiv definit sein soll.

(a) Verwenden Sie diese MATLAB-Funktion, um das globale Minimum von $f(x, y) = x^2 + 100y^2$ zu bestimmen. Verwenden Sie dazu den Startwert $z_0 = [10, 1]$. Bestimmen Sie ebenfalls numerisch die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration.

(b) Verwenden Sie die MATLAB-Funktion von Übungsblatt 3 (Gradientenverfahren mit Armijo-Schrittweitenregel) um das globale Minimum von $f(x, y) = x^2 + 100y^2$ zu bestimmen. Verwenden Sie dazu $z_0 = [10, 1]$, $\beta = 0.5$ und $\gamma = 0.01$. Bestimmen Sie ebenfalls numerisch die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration.

(c) Zeichnen Sie die Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = x^2 + 100y^2$ und zeichnen Sie in dasselbe Bild die Folge der Iterierten aus den Teilaufgaben **(a)** und **(b)**. Was können Sie beobachten?

(d) Vergleichen Sie grafisch die Konvergenzgeschwindigkeiten aus den Teilaufgaben **(a)** und **(b)**. Was können Sie schlussfolgern?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 15.11.201610:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 15.11.2016 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt4_1617:"**.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**.