GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 25.10.2016)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Gegeben sei die skalare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$. Berechnen Sie die quadratische Taylorapproximation in einem Entwicklungspunkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - 5xy^2 + 5y^4$.

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{x} = 0$ bzw. $\bar{y} = 0$ striktes globales Minimum von $x \mapsto f(x,0)$ bzw. $y \mapsto f(0,y)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ kein lokales Minimum von f ist.

Aufgabe 2.3 (schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]
Gegeben seien eine konvexe (aber nicht notwendigerweise stetige oder differenzierbare) Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und zwei Punkte x^*, $z \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\psi(t) = \frac{1}{t}\left(f(x^* + tz) - f(x^*)\right)$ monoton wachsend ist.

(b) Beweisen Sie die Existenz der einseitigen Richtungsableitung

$$\partial f(x^*)z := \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \psi(t) = \inf_{t>0} \psi(t).$$

(c) Zeigen Sie: f besitzt ein globales Minimum im Punkt $x^* \iff \partial f(x^*)(x - x^*) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: In allen Teilaufgaben kann die Konvexität von f ausgenutzt werden. Im Aufgabenteil **(b)** kann die Betrachtung der Punkte $x^* - z$, x^* und $x^* + tz$ hilfreich sein, um nachzuweisen, dass die Funktion ψ nach unten beschränkt ist.

Aufgabe 2.4 (Multiple Choice)[2 Punkte]

(a) $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann stationärer Punkt von f, wenn $\nabla f(x^*)^T h \leq 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. wahr ☐ falsch ☐

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$ ist gleichmäßig konvex. wahr ☐ falsch ☐

(c) Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvex, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist $g\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x))^2$ strikt konvex. wahr ☐ falsch ☐

(d) Jede streng konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitzt ein globales Minimum. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 2.5 (Votieraufgabe)
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $g\colon X \to \mathbb{R}$, mit $g(X) \subset I$, und $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und f sei monoton wachsend.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f \circ g\colon x \in X \mapsto f(g(x)) \in \mathbb{R}$ konvex ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass auf das monotone Wachstum von f im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 2.6 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]
Folgender Algorithmus dient der Berechnung von lokalen Minima einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

Gegeben seien ein Ausgangspunkt z_0, eine Schrittweite h, eine Toleranz ε und Suchrichtungen

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gehe immer vom aktuellen Ausgangspunkt einen Schritt mit Schrittweite h in jede Suchrichtung und bestimme den dortigen Funktionswert. Ebenso berechne den Funktionswert am aktuellen Ausgangspunkt. Stimmt der kleinste dieser 5 Funktionswerte mit dem Wert am Ausgangspunkt überein, so halbiere die Schrittweite und fahre fort. Andernfalls wähle das Argument des kleinsten Funktionswertes als neuen Ausgangspunkt und fahre mit der alten Schrittweite fort. Wiederhole den Vorgang, bis die Schrittweite kleiner als die Toleranz ε ist.

Implementieren Sie den Algorithmus in einer MATLAB-Funktion

```
function [z,fz] = Minimum(f, z0, h, ε).
```

Testen Sie ihre Funktion, indem Sie die Koordinaten $(z, f(z))$ der lokalen Minima folgender Funktionen bestimmen:

(a) $f_1(x, y) = \frac{1}{6}x^2 + y^2 + \frac{1}{4}x + 1$. Verwenden Sie $z_0 = (-10, 10)$, $h = 1$ und $\varepsilon = 0.01$.

(b) $f_2(x, y) = \frac{1}{4}(x^4y^2 + x^4) - x^3y^2 - x^3 + xy^2 + x + 5y^2 + 5$. Verwenden Sie $z_{0,1} = (0, 5)$ und $z_{0,2} = (0.5, 5)$, $h = 1$ und $\varepsilon = 0.01$.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 01.11.2016 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 01.11.2016 um 10:00 Uhr an **jahn@mathematik.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt2_1617:"**.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**.