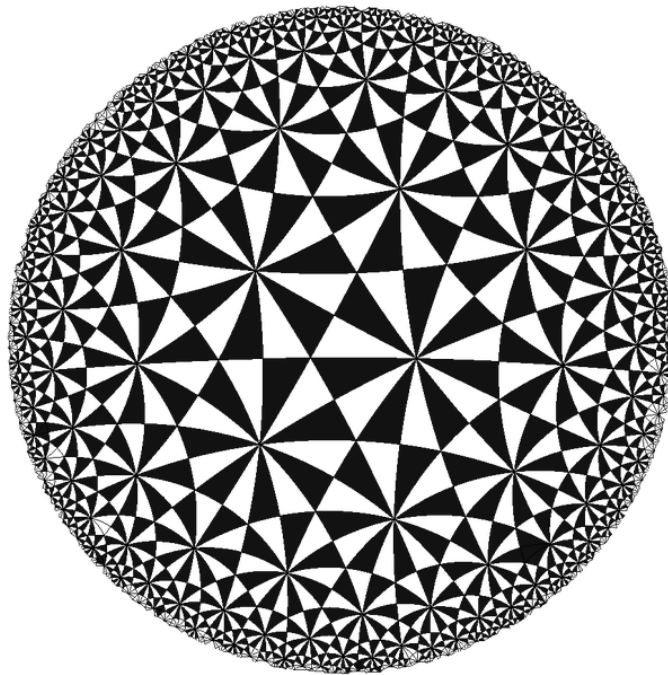


Skript zur Vorlesung

Funktionentheorie und Differentialgleichungen (2std.)



**Wintersemester 2012/13
Frankfurt am Main**

Prof. Dr. Martin Möller

überarbeitet von Prof. Dr. Jürgen Wolfart im Wintersemester 2013/14

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundbegriffe	2
2.1	Die komplexen Zahlen	3
2.2	Etwas Topologie	3
3	Komplexe Differenzierbarkeit	4
3.1	Differenzierbarkeit in einem Punkt	4
3.2	Ableitungsregeln	7
3.3	Die partiellen Ableitungen nach z und \bar{z}	8
4	Biholomorphe Abbildungen	8
5	Potenzreihen	10
5.1	Normale Konvergenz	13
5.2	Holomorphie von Potenzreihen	14
5.3	Die Exponentialfunktion	16
5.4	Polarkoordinaten	18
6	Wegintegrale	19
6.1	Unabhängigkeit von Weg und Parametrisierung	21
6.2	Stammfunktionen	23
7	Der Cauchysche Integralsatz	26
7.1	Das Goursat-Lemma und der Cauchy-Integralsatz	26
7.2	Die Cauchy-Integralformel	28
7.3	Entwicklung in Potenzreihen	30

8	Konsequenzen aus den Cauchy-Sätzen	32
8.1	Einige Highlights	32
8.2	Singularitäten	35
9	Laurentreihen und der Residuensatz	38
9.1	Laurentreihen und Holomorphie in Kreisringen	38
9.2	Meromorphe Funktionen und der Residuensatz	40
10	Die Riemannsche Zahlenkugel	42
10.1	Viele Definitionen	42
10.2	Die Automorphismen der Riemannschen Zahlenkugel	44
10.3	Der rationale Funktionenkörper	47
11	Etwas Funktionentheorie in mehreren Variablen	48
12	Differentialgleichungen	51
12.1	Explizite Differentialgleichungen	52
12.1.1	Die Variable y kommt in f nicht vor	52
12.1.2	Die Variable x kommt in f nicht vor	53
12.1.3	Getrennte Veränderliche $y' = f(x) \cdot g(y)$	54
12.1.4	Substitutionsmethoden	55
12.1.5	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	56
13	Existenz- und Eindeutigkeitsätze	57
13.1	Der Lipschitz-stetige Fall	57
13.2	Existenz und Eindeutigkeit im Komplexen	60
13.3	Der Existenzsatz von Peano	65

14 Lineare Differentialgleichungen	67
14.1 Systeme von Differentialgleichungen	67
14.2 Existenz- und Eindeutigkeitsätze für Systeme von Differentialgleichungen	69
14.3 Homogene lineare Systeme	70
14.4 Inhomogene lineare Systeme	72
14.5 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	74
14.6 Singularitäten	77
14.7 Die gedämpfte Schwingung	80

Vorwort

Dieses Skript¹ zu einer Vorlesung im WS 2012/13 in Frankfurt/Main kombiniert zwei Teilgebiete der Analysis, die eigentlich nur lose zusammenhängen. Das Literaturangebot zu beiden Themen ist umfangreich. Die Abschnitte zur Funktionentheorie sind aus

- Remmert, Schumacher: Funktionentheorie 1 (Springer)
- Conway: Functions in one complex variable (Springer)
- Freitag, Busam: Funktionentheorie 1 (Springer)
- Ahlfors: Complex Analysis (McGraw-Hill)

entstanden. Abschnitte zu Differentialgleichungen findet man auch in Standardwerken zur Analysis wie

- Königsberger: Analysis 1 (Springer)
- Forster: Analysis 2 (Vieweg)
- Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen (Vieweg + Teubner)
- Trench: Elementary Differential Equations (Brooks/Cole), jetzt frei verfügbar unter <http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/>

Hinweise zu Fehlern im Skriptum und Verbesserungsvorschläge sind gerne gesehen.

1 Einleitung

Die *komplexen Zahlen* sind entstanden auf der Suche nach einem Körper, über dem jedes Polynom in einer Variablen eine Nullstelle besitzt. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben. Viele in der Natur (Physik, . . .) auftretenden Funktionen hängen von einer komplexen Zahl z ab, also von zwei reellen

¹Titelbild: http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Tessellations_of_the_hyperbolic_plane

Parametern x und y . Was also ist der Unterschied zwischen Funktionentheorie, dem Studium von Funktionen in einer (oder mehreren) komplexen Zahlen und der Analysis auf \mathbb{R}^2 ?

Bereits in der Analysis I haben Sie Funktionen von $x \in \mathbb{R}$ kennengelernt, die unendlich oft differenzierbar sind, aber deren Taylorreihe nichts mit der Funktion gemeinsam hat, z.B.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0. \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Ähnliche Beispiele kann man auch für Funktionen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ konstruieren. Außerdem haben Sie Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ kennengelernt, die differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar sind und mit wenig mehr Mühe bastelt man Funktionen, die sieben Mal, aber nicht acht Mal differenzierbar sind.

Alle diese Merkwürdigkeiten verschwinden auf einen Schlag, wenn man annimmt, dass $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, auch holomorph genannt ist. Der Beweis dieser Aussage und die wichtigsten Konsequenzen hieraus sind Gegenstand des Abschnitts *Funktionentheorie*.

Gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben funktionale Abhängigkeiten zwischen differenzierbaren Funktionen einer (meist reellen, manchmal auch komplexen) Variablen und ihren Ableitungen, aber auch ihren Variablen. Als Lösungen sind hier also Funktionen gesucht wie z.B. in den Differentialgleichungen

$$y' + ky = 0 \quad \text{oder} \quad y'' + \omega^2 \sin(y) = 0 \quad ,$$

die – wie viele andere Beispiele – der klassischen Physik entnommen sind. Nicht nur der zeitliche Ablauf physikalischer Zustände wird durch Differentialgleichungen beschrieben; sie erweisen sich heute auch in anderen Bereichen wie der Finanzmathematik als nützlich, dort allerdings in weit schwierigerer Form als *stochastische* oder *partielle Differentialgleichungen*. Ein erstes Beispiel partieller Differentialgleichungen, in denen Funktionen mehrerer Variabler gesucht werden, wird uns bereits im Rahmen der Funktionentheorie begegnen, im übrigen ist diese Vorlesung für beide Gebiete aber nur als ein erster Einstieg zu betrachten.

2 Grundbegriffe

Wir fassen hier einige Begriffe zusammen, die aus der Analysis bekannt sein sollten.

2.1 Die komplexen Zahlen

Sei $\mathbb{C} = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$ die Menge der *komplexen Zahlen* mit der Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

und komponentenweiser (Vektor-)Addition. Wir schreiben diese Paare ab sofort $x + iy$ und obige Multiplikation ist äquivalent zu Rechenregel $i^2 = -1$. Zu $z = x + iy$ heißt $\bar{z} = x - iy$ die *komplex konjugierte Zahl* und $|z| = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* von z . Leicht nachzurechnen: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad |zw| = |z| \cdot |w|.$$

Die letzte Gleichung gibt bereits einen ersten Hinweis auf die geometrische Bedeutung der Multiplikation komplexer Zahlen; mehr dazu am Ende des Abschnitts 5 über Potenzreihen. Die komplexen Zahlen bilden einen Körper, denn das Inverse von $z = x + iy$ ist $z^{-1} = \frac{x}{|z|^2} - i \frac{y}{|z|^2}$. Die Abbildung $x \mapsto x + i \cdot 0$ definiert eine Einbettung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist.

Ist $z = x + iy$, so heißt $x = \operatorname{Re}(z)$ der *Realteil* und $y = \operatorname{Im}(z)$ der *Imaginärteil* von z .

Der komplexe Betrag definiert vermöge

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

einen Abstands begriff (Metrik) auf \mathbb{C} , insbesondere gilt die *Dreiecksungleichung*

$$d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn z_2 auf der Verbindungsgeraden zwischen z_1 und z_3 liegt. \mathbb{C} besitzt aber keine Anordnung, d.h. es gibt keine Relation „ $<$ “, die sinnvoll, d.h. verträglich mit der Multiplikation ist.

2.2 Etwas Topologie

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls es $R > 0$ gibt mit $|z| \leq R$ für alle $z \in M$. Mithilfe des Abstands begriffs definiert man offene und abgeschlossene Mengen sowie Konvergenz von Folgen und Reihen. Da für $z = x + iy$ gilt $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, stimmen diese Begriffe alle mit den von \mathbb{R}^2 gewohnten Begriffen überein.

Ein *Weg* $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung des Intervalls $[a, b]$ nach \mathbb{C} . Man

spricht von einem Weg *von* $\gamma(a)$ *nach* $\gamma(b)$. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ *geschlossen*. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in M$ einen Weg von z_1 nach z_2 gibt. Eine Menge M heißt *zusammenhängend*, falls aus einer Überdeckung von M durch disjunkte offene Mengen $M \subseteq M_1 \dot{\cup} M_2$ (d.h. $M \subseteq M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2 = \emptyset$) folgt $M_1 = \emptyset$ oder $M_2 = \emptyset$.

Offene Mengen in \mathbb{C} sind zusammenhängend genau dann, wenn sie wegzusammenhängend sind (Übung!). Zusammenhängende offene Mengen in \mathbb{C} heißen *Gebiete*.

3 Komplexe Differenzierbarkeit

3.1 Differenzierbarkeit in einem Punkt

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir erinnern zunächst an den entsprechenden Begriff aus der Analysis für \mathbb{R}^2 . Eine Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt in z_0 *differenzierbar*, wenn es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, sodass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - T(h)|}{|h|} = 0.$$

Die Betragsstriche bezeichnen dabei die 2-Norm auf \mathbb{R}^2 . Die Abbildung T wird die Ableitung von f im Punkt z_0 genannt. Eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist, mit der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ auch eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, aber nicht jede solche \mathbb{R} -lineare Abbildung ist auch \mathbb{C} -linear. Daraus wird klar, dass der folgende Begriff eine stärkere Bedingung als reelle Differenzierbarkeit ist. Man beachte, dass eine \mathbb{C} -lineare Abbildung durch eine einzige komplexe Zahl $T(1)$ eindeutig bestimmt ist.

Definition 3.1 Eine Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* in z_0 , falls es eine Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot h|}{|h|} = 0.$$

Die Abbildung f heißt *holomorph* in z_0 , falls es eine Umgebung U von z_0 gibt und f komplex differenzierbar in z für alle $z \in U$ ist. Wir nennen $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ *holomorph*, falls für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ die Funktion f in z_0 holomorph ist. Wir schreiben auch $\frac{df}{dz}(z_0)$ für $f'(z_0)$.

Man beachte, dass man im Bruch in der Definition der komplexen Differenzierbarkeit die Betragsstriche statt im Zähler und Nenner auch um den gesamten Bruch schreiben kann.

Beispiele 3.2 i) Die Abbildung $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist auf ganz \mathbb{C} differenzierbar, denn es folgt aus der Binomischen Formel, dass

$$(z_0 + h)^n - z_0^n = h \cdot n \cdot z_0^{n-1} + h^2 \cdot \binom{n}{2} \cdot z_0^{n-2} + \dots + h^n$$

gilt. Also ist

$$f'(z_0) = n \cdot z_0^{n-1},$$

denn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - n \cdot z_0^{n-1} \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \cdot \binom{n}{2} \cdot z_0^{n-2} + \dots + h^{n-1} \right) = 0.$$

ii) Die Abbildung $f(z) = \bar{z}$ ist nirgends holomorph, denn $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$ und der Limes hiervon für $h \in \mathbb{R}, h \rightarrow 0$ ist 1, aber für $h \in i\mathbb{R}$ ist der Limes $h \rightarrow 0$ gleich -1 .

Wir vergleichen die beiden Differenzierbarkeitsbegriffe, reell und komplex, noch genauer. Die lineare Abbildung T wird durch eine 2×2 -Matrix gegeben. Schreiben wir die komplexe Funktion $f = f_1 + if_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stattdessen als $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der zwei reellen Komponentenfunktion $f = (f_1, f_2)$, so ist T nach Definition der partiellen Ableitungen durch die Abbildungsmatrix (stets bzgl. der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in diesem Abschnitt)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

gegeben. Ganz allgemein gilt: Ist eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gegeben, so ist T auch \mathbb{C} linear, genau dann, wenn – komplex geschrieben –

$$(\#) \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = iA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad b + id = T(i) = iT(1) = i(a + ic) = -c + ia$$

gilt, also genau dann, wenn sie die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

hat. In unserem Differenzierbarkeitsproblem lauten also die Bedingungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Diese beiden partiellen Differentialgleichungen werden die *Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen* genannt. Wir fassen zusammen, was wir soeben bewiesen haben.

Satz 3.3 Für $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- i) Im Punkt $z_0 \in D$ ist f komplex differenzierbar.
- ii) Im Punkt $z_0 \in D$ ist f reell differenzierbar und die Ableitung ist eine \mathbb{C} -lineare Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : h \mapsto f'(z_0) \cdot h$.
- iii) Im Punkt $z_0 \in D$ ist f reell differenzierbar und die partiellen Ableitungen genügen den Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen.

Wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist, haben die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen folgende geometrische Bedeutung: Die Abbildungsmatrix A ist $\neq 0$ und hat die Determinante $a^2 + b^2$, ist also sogar nichtsingulär. Division durch den Faktor $|f'(z_0)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ führt sie in eine eigentlich orthogonale Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

über, die also eine Drehung um den Winkel φ beschreibt. Die Tangentialabbildung von f in z_0 ist darum eine Drehstreckung mit Streckungsfaktor $|f'(z_0)|$, welche Winkel invariant lässt. Man spricht darum von *konformen Abbildungen*: f bildet glatte Kurven, die sich in z_0 unter dem Winkel ψ schneiden, auf Kurven ab, die sich in $f(z_0)$ unter dem gleichen Winkel schneiden.

Beispiele 3.4 i) Die Abbildung $f(x + iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$ ist reell differenzierbar und hat die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + i2xy^3$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + i3x^2y^2$. Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen besagen, dass zur komplexen Differenzierbarkeit im Punkt (x_0, y_0) $3x_0^2y_0^2 = 3x_0^2y_0^2$ und $2x_0y_0^3 = -2x_0^3y_0$ gelten muss.

Dies ist offenbar genau dann erfüllt, wenn $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$ ist. In diesen Punkten ist f zwar komplex differenzierbar, aber f ist nirgends holomorph.

ii) Die Funktion $f(x + iy) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ ist reell differenzierbar und hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + ie^x \cos y$$

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind also in jedem Punkt erfüllt. Wir werden diese Funktion, die komplexe Exponentialabbildung, noch im übernächsten Abschnitt ausdrücklich diskutieren.

3.2 Ableitungsregeln

Wir können die folgenden Ableitungsregeln wahlweise mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit unter Nachahmung des reell eindimensionalen Falles beweisen oder mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen aus dem reell zweidimensionalen Fall folgern.

Satz 3.5 Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in z_0 . Dann sind $af + bg$ und fg für alle $a, b \in \mathbb{C}$ holomorph in z_0 und es gilt

$$\begin{aligned}(af + bg)'(z_0) &= af'(z_0) + bg'(z_0) \\ (fg)'(z_0) &= (f'g)(z_0) + (fg')(z_0).\end{aligned}$$

Ist g nullstellenfrei, so ist f/g holomorph in z_0 und es gilt

$$(f/g)'(z_0) = ((f'g - fg')/(g^2))(z_0).$$

Ist $f: D \rightarrow D' \subseteq \mathbb{C}$ und $g: D' \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in $f(z_0)$ so ist $g \circ f$ holomorph in z_0 und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

Beweis: Exemplarisch beweisen wir die Kettenregel, die anderen Regeln verbleiben als Übung. Wir betrachten die Hilfsfunktion:

$$G: D'_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad G(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(f(z_0))}{w - f(z_0)} & , w \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)) & , w = f(z_0). \end{cases}$$

Diese ist stetig in $f(z_0)$, da g in $f(z_0)$ komplex differenzierbar ist. Ferner gilt für $z \in D \setminus \{z_0\}$

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = G(f(z)) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

und $\lim_{z \rightarrow z_0} G(f(z)) = G(f(z_0)) = g'(f(z_0))$. Also steht im $\lim_{z \rightarrow z_0}$ auf der rechten Seite der Gleichung gerade $g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$, was zu zeigen war. \square

3.3 Die partiellen Ableitungen nach z und \bar{z}

Wir schreiben die Ableitung einer reell differenzierbaren Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ noch einmal auf. Die Ableitung $f'(z_0)$ im Punkt $z_0 \in D$ ist eine lineare Funktion $T = T_{f,z_0}$ und es gilt

$$T(h) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \operatorname{Re} h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \operatorname{Im} h.$$

Wir definieren $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ so, dass die Gleichung

$$T(h) = \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{h}$$

erfüllt ist. Nach Einsetzen von $\operatorname{Re} h = \frac{1}{2}(h + \bar{h})$ und $\operatorname{Im} h = \frac{1}{2i}(h - \bar{h})$, erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Satz 3.6 Eine reell differenzierbare Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar in z_0 , falls $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ ist.

Beweis : Wir schreiben $f = f_1 + i f_2$. Dann ist $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ äquivalent zu

$$0 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) + i \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) + i \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)$$

und wegen der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen ist dies äquivalent zur komplexen Differenzierbarkeit. \square

4 Biholomorphe Abbildungen

Seien D_1 und D_2 Gebiete in \mathbb{C} . Eine holomorphe Abbildung $f: D_1 \rightarrow D_2$ heißt *biholomorph*, wenn es eine holomorphe Umkehrabbildung $f^{-1}: D_2 \rightarrow D_1$ gibt. Dieser Abschnitt gibt erste Aussagen, welche Gebiete in \mathbb{C} hinsichtlich der Funktionentheorie gleich sind, wann es also eine biholomorphe Abbildung zwischen zwei Gebieten gibt. Es sei

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

die obere Halbebene und

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe. Die Abbildung

$$h_c(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

wird Cayley-Transformation genannt. Es gilt

Satz 4.1 Die Cayley-Transformation definiert eine biholomorphe Abbildung $h_c: \mathbb{H} \rightarrow \Delta$, deren Umkehrabbildung durch $h_c^{-1}: \Delta \rightarrow \mathbb{H}$, $h_c^{-1}(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$ gegeben ist.

Beweis : Die Mittelsenkrechte zur Strecke $[i, -i]$ ist die reelle Achse. Alle Punkte der oberen Halbebene liegen näher an i als an $-i$. Für $z \in \mathbb{H}$ ist folglich $|z - i| < |z - (-i)|$ und daher ist $|h_c(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Dass die Abbildungen zueinander invers sind, rechnet man direkt nach. \square

Die Cayley-Transformation ist nicht der einzige Biholomorphismus $\mathbb{H} \rightarrow \Delta$. Allgemeiner ist die Verkettung von biholomorphen Abbildungen wieder biholomorph. Wir untersuchen also biholomorphe Selbstabbildungen von \mathbb{H} und Δ . Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

und wir betrachten die gebrochen-linearen Abbildungen

$$M_A(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \quad ,$$

auch Möbius-Transformationen genannt. Man rechnet nach, dass für $A, B \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt (Übung!)

$$M_{A \cdot B}(z) = M_A(M_B(z)).$$

Offenbar stimmen für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ die Abbildungen $M_{\lambda A}$ und M_A überein. Wir schreiben $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ für die Matrizen mit positiver reeller Determinante.

Satz 4.2 Ist $A \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$, so ist M_A ein Biholomorphismus von \mathbb{H} . Zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ gibt es eine Matrix A mit $M_A(z_1) = z_2$.

In der Sprechweise der Gruppentheorie heißt das: Die Gruppe $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf \mathbb{H} .

Beweis : Da A reell ist, gilt

$$\begin{aligned} 2i \cdot \operatorname{Im} M_A(z) &= M_A(z) - \overline{M_A(z)} = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \\ &= \frac{(az + b)(c\bar{z} + d) - (a\bar{z} + b)(cz + d)}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{ad - bc}{|cz + d|^2}(z - \bar{z}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Im} M_A(z) = \frac{\det A}{|cz + d|^2} \operatorname{Im}(z) > 0.$$

Die Umkehrabbildung von M_A ist $M_{A^{-1}}$ nach der obigen Verkettungsregel.

Für die letzte Aussage genügt es zu jedem z_2 eine Matrix $A \in \operatorname{GL}_2^+(\mathbb{R})$ zu finden, mit $M_A(i) = z_2$. Der Ansatz $c = 0$ und $d = a^{-1}$ liefert für $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$

$$M_A(i) = \frac{a \cdot i + b}{a^{-1}} = b \cdot a + i \cdot a^2 \stackrel{!}{=} z = x + iy.$$

Diese Bedingung kann man offenbar für alle $z \in \mathbb{H}$, d.h. mit $y > 0$ lösen. \square

Darüber hinaus lässt sich zeigen (was den Rahmen unserer Vorlesung übersteigt), dass *alle* biholomorphen Abbildungen von \mathbb{H} auf sich durch diese reellen Möbiustransformationen gegeben sind.

5 Potenzreihen

Wie in der reellen Analysis sind Potenzreihen neben Polynomen und gebrochen rationalen Funktionen die wichtigste Quelle für interessante Funktionen. Wir schreiben eine Potenzreihe (mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$) als

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Der *Konvergenzradius* ist wie in der Analysis als

$$R = \sup\{t \geq 0 : |a_n| \cdot t^n \text{ ist beschränkt}\}$$

definiert ($R = \infty$ ist zugelassen). Erinnerung: Für jedes positive $s < R$ gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n s^n| < C$, also lässt sich für einen etwas verkleinerten Radius $0 < r < s$

und alle z mit $|z - z_0| \leq r$ die Potenzreihe majorisieren durch eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n \geq 0} |a_n(z - z_0)^n| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n r^n| < C \sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{s^n}$$

Somit ergibt sich der folgende nützliche Sachverhalt:

Lemma 5.1 *Bei positivem Konvergenzradius R konvergiert die Potenzreihe auf der offenen Kreisscheibe $D = B_R(z_0) := \{z \mid |z - z_0| < R\}$ und definiert eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Auf jeder kleineren (sogar abgeschlossenen) Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)}$, $0 < r < R$, konvergiert die Potenzreihe sogar absolut gleichmäßig.*

Zur Bedeutung der gleichmäßigen Konvergenz vergleiche den nächsten Unterabschnitt 5.1. Die Kriterien für absolute Konvergenz aus der Analysis (Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, Majorantenkriterium) gelten hier mit gleichem Beweis. Dabei ist, wo immer ein Betrag auftritt, der komplexe Betrag zu verwenden. Außerhalb der abgeschlossenen Konvergenzkreisscheibe divergiert die Potenzreihe, auf den Randpunkten der Konvergenzkreisscheibe ist „alles möglich“.

Beispiele 5.2 i) Die Exponentialfunktion. Wir definieren die Exponentialreihe

$$\exp(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Es ist $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$, also konvergiert die Exponentialreihe auf ganz \mathbb{C} .

ii) Die komplexen trigonometrischen Funktionen.

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \\ \sin(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

konvergieren ebenfalls auf ganz \mathbb{C} und es gilt (Übung!)

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

iii) Die Logarithmusreihe. Wir definieren

$$\lambda(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Diese hat Konvergenzradius $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Wir vermeiden im Moment das Symbol \log . Natürlich stimmt für reelle z , $-1 < z < 1$, diese Funktion mit $\log(1+z)$ wie in der Analysis überein.

iv) Die hypergeometrischen Funktionen. Wir definieren zunächst eine Verallgemeinerung der Notation $n!$, das *Pochhammersymbol*, durch

$$(\alpha)_m = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ \alpha(\alpha+1) \cdot \dots \cdot (\alpha+m-1) & \text{für } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die folgende Reihe mit 3 Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n} \cdot z^n$$

heißt *hypergeometrische Reihe* (für $\gamma = -t$, $t \in \mathbb{N}$, wird nur bis $n = t$ summiert). Ihre Bedeutung erhält sie als Lösung einer Differenzialgleichung, deren Lösungen (für spezielle Parameter) eng mit der Parkettierung der Einheitskreisscheibe auf dem Titelblatt zusammenhängen. Der Konvergenzradius ist

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)} = 1.$$

Dies ist ein Beispiel für eine Reihe, die auf den Rand des Einheitskreises überall absolut konvergiert, falls $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ ist. Mit der unten erklärten \mathcal{O} -Notation gilt auf dem Rand $|z| = 1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)} \right| = \left| \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right| \\ &= \left| \frac{1 + \frac{\alpha+\beta}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{\gamma+1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right| \\ &= \left| \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{\gamma+1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right| \\ &= \left| 1 - \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \\ &= \sqrt{1 - \frac{2+\gamma-\alpha-\beta+(\gamma-\alpha-\beta)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= 1 - \frac{1+\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also nach dem untenstehenden Lemma.

Eine kurze Einführung (oder Wiederholung?) der \mathcal{O} -Notation:

Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir schreiben

$$f \in \mathcal{O}(n^k) \text{ für ein } k \in \mathbb{R}$$

falls es $C > 0$ und $N > 0$ gibt, sodass

$$|f(n)| \leq C \cdot n^k \text{ für alle } n \geq N.$$

Diese Notation ist bequem, denn ist $f, g \in \mathcal{O}(n^k)$, so sind $\alpha f + g, f \cdot g \in \mathcal{O}(n^k)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$. Außerdem haben wir oben verwendet, dass

$$\left(1 - \frac{a}{n} + f\right)^{-1} \in 1 + \frac{a}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

falls $f \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (Übung!).

Lemma 5.3 Die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n$ konvergiert, falls es $C > 1$ und $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \frac{C}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

Beweis : Die Reihe $\sum_{n \geq 0} b_n$ mit $b_n = \frac{1}{n^s}$ und $1 < s \in \mathbb{R}$ konvergiert. Es ist

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} = 1 - \frac{s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Also ist für $1 < s < C$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

für n groß genug. Folglich gibt es ein M , sodass $\sum_{n \geq 0} M \cdot b_n$ eine konvergente Majorante ist. \square

5.1 Normale Konvergenz

Wir wollen einen Konvergenzbegriff für Reihen von Funktionen $\sum f_n$ mit $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ definieren, der leicht zu verifizieren ist und impliziert, dass wir sorglos rechnen können, also vertauschen können und als Limes von stetigen Funktionen wieder stetige Funktionen haben. Wir erinnern kurz an die Begriffe der Analysis.

Eine Funktionfolge $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert auf D_1 *gleichmäßig* gegen $f: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 = N_0(\varepsilon)$ gibt, sodass

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_0 \text{ und alle } z \in D_1.$$

Dieser Konvergenzbegriff ist äquivalent zur Konvergenz in der Supremumsnorm auf D_1 . Wir können ihn auf Reihen anwenden, indem wir ihn für die Folge der Partialsummen anwenden und gegebenenfalls mit der Dreiecksungleichung kombinieren, um zur Absolutreihe überzugehen wie in Lemma 5.1. Summe bzw. Produkte gleichmäßig konvergenter Folgen von Funktionen konvergieren gegen die Summe bzw. das Produkt der Limesfunktionen. Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig. Diesen Satz aus der Analysis erhält man bereits unter der schwächeren Voraussetzung, dass die Folge stetiger Funktionen f_n lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h. dass jeder Punkt $z \in D_1$ eine Umgebung U_z besitzt, sodass f_n auf U gleichmäßig konvergiert.

Beispiel 5.4 Die Folge $f_n(z) = z^n: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ ist lokal gleichmäßig, aber nicht gleichmäßig konvergent.

Definition 5.5 Eine Reihe $\sum f_n$ von Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt normal konvergent, falls jeder Punkt $z_0 \in D$ eine Umgebung U besitzt, sodass $\sum \sup_{z \in U} |f_n(z)| < \infty$.

Proposition 5.6 Ist die Reihe $\sum f_n$ normal konvergent, so konvergiert $\sum f_n$ lokal gleichmäßig.

Insbesondere ist in diesem Fall $f = \sum f_n$ stetig, falls alle f_n stetig sind. Der Beweis der Proposition ist genau die Aussage des (Weierstraßschen) Majorantenkriteriums aus der Analysis.

Proposition 5.7 Konvergiert die Reihe $\sum f_n$ auf D normal gegen f , so konvergiert für jede Umordnung, d.h. jede Bijektion $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die umgeordnete Reihe $\sum_{n \geq 0} f_{\tau(n)}$ auf D normal gegen f .

Beweis : Das Majorantenkriterium aus der Analysis besagt, dass für jedes $z \in D$ die Reihe $\sum f_n(z)$ absolut konvergiert und daher jede Umordnung gegen den gleichen Grenzwert konvergiert. \square

5.2 Holomorphie von Potenzreihen

Zunächst bestimmen wir den Konvergenzradius der Potenzreihe, die durch gliedweise Differentiation und Integration entsteht.

Lemma 5.8 Hat $P_1 = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ den Konvergenzradius R , so haben auch die Reihen $P_2 = \sum_{n \geq 0} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ und $P_3 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} a_n (z - z_0)^{n+1}$ den Konvergenzradius R .

Beweis : Der Konvergenzradius R' der Reihe P_2 ist

$$R' = \sup\{t \geq 0 : n |a_n| t^{n-1} \text{ ist beschränkt}\}.$$

Ist $n |a_n| t^{n-1}$ beschränkt, so auch $|a_n| t^n$ und damit ist $R' \leq R$. Für die umgekehrte Inklusion zeigen wir für jedes $r < R$, dass auch $r < R'$ gilt. Ist $r < s \leq R$, so ist $|a_n| s^n$ beschränkt und

$$n \cdot |a_n| r^{n-1} = (r^{-1} \cdot |a_n| \cdot s^n) \cdot (n \cdot q^n) \text{ mit } q = r \cdot s^{-1}.$$

Da $n \cdot q^n$ eine Nullfolge ist und der erste Faktor nach Voraussetzung beschränkt ist, ist auch die linke Seite beschränkt.

Die Potenzreihe P_2 entsteht aus P_1 durch gliedweise Differentiation. Ebenso entsteht P_1 aus P_3 durch gliedweise Differentiation. Also genügt der Beweis der ersten Aussage zum Beweis, dass auch P_3 den Konvergenzradius R hat. \square

Wir können nun zeigen, dass Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich holomorph sind. Mehr noch:

Satz 5.9 Die Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist ihre Grenzfunktion $f: B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ unendlich oft komplex differenzierbar in jedem Punkt von $B_R(z_0)$ und es gilt für $k \in \mathbb{N}$:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} k! \binom{n}{k} a_n (z - z_0)^{n-k} \text{ für } z \in B_R(z_0)$$

Insbesondere ist f holomorph in z_0 .

Beweis : Wir behandeln zunächst den Fall $k = 1$. Nach dem vorigen Lemma ist klar, dass $g(z) = \sum_{n \geq 1} n \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-1}$ eine Funktion $g: B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Wir wollen zeigen, dass $f'(z) = g(z)$ gilt. Ist $h(z) = z - z_0$, so ist $(f \circ h)(z) = f(h(z))$ und daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $z_0 = 0$ ist. Um die Behauptung im Punkt $z_1 \in B_R(z_0)$ zu zeigen, sei für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$

$$q_n(z) = z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \dots + z^{n-j} z_1^{j-1} + \dots + z_1^{n-1}.$$

Dann ist $z^n - z_1^n = (z - z_1)q_n(z)$, also gilt

$$f(z) - f(z_1) = \sum_{n \geq 1} a_n (z^n - z_1^n) = (z - z_1) \sum_{n \geq 1} a_n q_n(z).$$

Wir definieren $f_1(z) = \sum_{n \geq 1} a_n q_n(z)$. Dann ist

$$f_1(z_1) = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot n \cdot z_1^{n-1} = g(z_1).$$

Sobald wir wissen, dass f_1 in z_1 stetig ist, folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z) - f(z_1) - (z - z_1)f_1(z_1)}{(z - z_1)} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1)f_1(z) - (z - z_1)f_1(z_1)}{z - z_1} = 0.$$

Um dies zu zeigen, müssen wir prüfen, dass $\sum a_n q_n(z)$ normal in $B_R(0)$ konvergiert. Jeder Punkt in $B_R(0)$ liegt in einer Kreisscheibe B_r mit $|z_1| < r < R$ und dort gilt $\sup_{z \in B_r} |a_n q_n(z)| \leq |a_n| n \cdot r^{n-1}$, also aufsummiert

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{z \in B_r} |a_n q_n(z)| \leq \sum_{n \geq 1} n |a_n| r^{n-1} < \infty$$

nach Lemma 5.8.

Für $k > 1$ ist nur induktiv zu zeigen, dass $\sum_{n \geq k} k! \binom{n}{k} a_n (z - z_0)^{n-k}$ die k -te Ableitung von $\sum a_n (z - z_0)^n$ ist, und das ist eine leichte Rechnung. \square

5.3 Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp(z)$ hat die herausragende Eigenschaft $\exp'(z) = \exp(z)$, wie man aus vorigen Satz und der definierenden Potenzreihe sieht. Daraus leiten wir alle weiteren Eigenschaften in einer Serie von Lemmata ab.

Lemma 5.10 Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) \neq 0$

Beweis: Sei $h(z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$. Dann gilt $h'(z) = h - h = 0$ und wegen $f(0) = 1$, also $h(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. \square

Lemma 5.11 Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$$

Beweis : Es gilt

$$p_m := \sum_{n_1+n_2=m} \frac{1}{n_1!} z_1^{n_1} \cdot \frac{1}{n_2!} z_2^{n_2} = \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z_1^{m-n} z_2^n = \frac{1}{m!} (z_1 + z_2)^m$$

und damit folgt

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^m}{m!} = \exp(z_1 + z_2)$$

□

Anders gesagt ist $\exp: (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot) := (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus. Es gilt

$$\exp(\lambda(z)) = 1 + z,$$

denn mit Hilfe von

$$\lambda'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 \pm \dots = \frac{1}{1+z}$$

sieht man

$$f(z) = (1+z) \exp(-\lambda(z)) \implies f'(z) = \exp(-\lambda(z))(1 - (1+z)\lambda'(z)) = 0$$

Also ist f konstant und außerdem ist $f(0) = 1$. Dies verwenden wir für den folgenden Satz.

Satz 5.12 Die Exponentialabbildung $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist surjektiv.

Beweis : Zunächst zeigen wir, dass das Bild von \exp offen ist. Da $\lambda(z)$ den Konvergenzradius 1 hat, folgt aus der vorangestellten Formel, dass $B_1(1) \subseteq \exp(\mathbb{C})$. Es gilt $a \cdot B_1(1) = B_{|a|}(a)$. Außerdem ist für $a \in \exp(\mathbb{C})$ auch $a \cdot \exp(\mathbb{C}) = \exp(\mathbb{C})$. Zusammen liefert das $B_{|a|}(a) = a \cdot B_1(1) \subseteq a \exp(\mathbb{C}) = \exp(\mathbb{C})$ für alle $a \in \exp(\mathbb{C})$. Damit haben wir gezeigt, dass das Bild von $\exp(\mathbb{C})$ um jeden Punkt eine Kreisscheibe enthält, die wieder im Bild liegt.

Sei nun $A = \exp(\mathbb{C})$, $B = \mathbb{C}^* \setminus A$. Da A offen ist, ist $b \cdot A$ offen für alle $b \in \mathbb{C}^*$, insbesondere für alle $b \in B$. Also ist auch $\bigcup_{b \in B} bA$ offen in \mathbb{C}^* . Da A eine Untergruppe ist, ist $bA \subseteq B$. Also ist $B = \bigcup_{b \in B} bA$ offen. Da $\mathbb{C}^* = A \cup B$ zusammenhängend ist und A nicht leer, muß B leer sein. □

Satz 5.13 *Es gibt genau eine positive reelle Zahl, genannt π , sodass*

$$\text{Kern}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Beweis : Zunächst ist $\text{Kern}(\exp)$ nicht leer, denn es gibt ein $a \neq 0$ mit $\exp(a) = -1$ und daraus folgt, dass $2a \neq 0$ die Eigenschaft $\exp(2a) = (-1)^2 = 1$ hat. Durch Vergleich der definierenden Potenzreihen und aufgrund der Multiplikativität von \exp erhalten wir die nützliche Formel für $z = x + iy$.

$$\exp(z) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y).$$

Hieraus folgt auch

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z) \cdot \exp(\bar{z}) = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2 \operatorname{Re} z) = \exp((\operatorname{Re}(z))^2)$$

und damit $|\exp(z)| = 1$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}(z) = 0$, also $z \in \mathbb{R} \cdot i$ liegt. Dies zeigt, dass $\text{Kern}(\exp) \subseteq i \cdot \mathbb{R}$. Schließlich behaupten wir, dass es eine Umgebung U von Null gibt mit $U \cap \text{Kern}(\exp) = \{0\}$. Andernfalls gäbe es eine Nullfolge $z_n \neq 0$ mit $\exp(z_n) = 1$. Aus

$$1 = \exp(0) = \exp'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(z_n) - \exp(0)}{z_n} = 0$$

erhalten wir den gewünschten Widerspruch. Also gibt es eine kleinste positive reelle Zahl π mit $2\pi i \in \text{Ker}(\exp)$. Wir müssen noch zeigen, dass alle Elemente im Kern ganzzahlige Vielfache hiervon sind. Ist $r \cdot i \in \text{Kern}(\exp)$, so gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $2\pi \cdot n \leq r < 2\pi \cdot (n + 1)$. Da $ri - 2n\pi i \in \text{Kern}(\exp)$ und $0 \leq r - 2n\pi < 2\pi$, muss $r = 2n\pi$ sein, damit die Minimalität in der Wahl von π nicht verletzt ist. Dies zeigt die letzte verbliebene Behauptung. \square

5.4 Polarkoordinaten

Kleiner Rückblick auf Analysis I: Aus der Reihendarstellung folgt, dass für reelle $x \geq 0$ alle Werte $e^x := \exp(x) \geq 1$ sind und wegen $\exp' = \exp$ streng monoton wachsen – und zwar schneller als jedes Polynom. Wegen $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$ sind die Werte der reellen Exponentialfunktion überall positiv, und \exp ist auf ganz \mathbb{R} streng monoton wachsend. Wie die komplexe Exponentialfunktion stellt sie also einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}^*, \cdot)$ dar, nun aber mit trivialem Kern, folglich sogar einen *Gruppenisomorphismus*.

Aus dem Beweis von Satz 5.13 und den Beispielen 5.2 entnehmen wir daher, dass $\exp(iy) =: e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$ in jedem halboffenen y -Intervall $[y_0, y_0 + 2\pi[$ genau einmal den Einheitskreis durchläuft. Wir fassen zusammen:

Satz 5.14 1. Die komplexe Exponentialfunktion \exp bildet jeden halboffenen Streifen

$\{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$ bijektiv auf \mathbb{C}^* ab.

2. Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ lässt sich schreiben als $r \cdot e^{i\varphi}$, dabei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ eindeutig bestimmt ($= |z|$), $\varphi \in \mathbb{R}$ eindeutig modulo $2\pi\mathbb{Z}$.

φ wird auch das *Argument* $\arg(z)$ von z genannt; es beschreibt den Winkel von der positiven reellen Halbachse zur Strecke $[0, z]$ zwischen 0 und z . $(r, \varphi) = (|z|, \arg(z))$ heißen die *Polarkoordinaten* von z . Aus dem Additionstheorem Lemma 5.11 und der Verwendung von Polarkoordinaten ergeben sich einige nützliche Einsichten:

Folgerung 5.15 Bei der Multiplikation von z_1 und $z_2 \in \mathbb{C}^*$ multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente.

Folgerung 5.16 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n - 1 = 0$ genau n Lösungen, nämlich

$$e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad .$$

Die Lösungspunkte heißen die *n -ten Einheitswurzeln*; sie bilden ein regelmäßiges n -Eck auf dem Einheitskreis. Schließlich folgen aus dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion Lemma 5.11, angewandt auf $e^{i(\varphi+\psi)}$, die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

Folgerung 5.17 Für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cos(\psi) - \sin(\varphi) \sin(\psi), \quad \sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cos(\psi) + \cos(\varphi) \sin(\psi) \quad .$$

6 Wegintegrale

Für eine stetige Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ definiert auf einem Intervall $I = [a, b]$ definieren wir das Integral

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t) dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} f)(t) dt$$

ganz analog wie für Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wie in der Analysis gelten daher Linearität, Monotonie und Betragsabschätzung. Eine Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f , falls $F' = f$ (reelle Differenzierbarkeit) gilt. Der Fundamentalsatz der Integralrechnung, Substitutionsregel und partielle Integration übertragen sich wörtlich aus der reellen Analysis.

Für $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist $\int f(z)dz$ nicht erklärt, wie auch für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ das Integral $\int f(x,y)dxdy$ nicht definiert ist. Ist jedoch $\gamma: [a,b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ ein *glatter* Weg, d.h. mit stetig differenzierbarer Parameterdarstellung γ , so erklären wir das *Kurvenintegral* $\int_{\gamma} f dz$ von f über γ als den Limes über alle endlichen Summen

$$\sum_{j=1}^n f(z_j)(z_j - z_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(\gamma(t_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \quad \text{mit} \quad \gamma(t_j) = z_j$$

(für alle $j = 0, 1, \dots, n$, $t_0 = a$, $t_n = b$) von f -Werten über die Kurvenpunkte, wobei die Feinheit der Unterteilung in Kurvenpunkte, d.h. das Maximum der Abstände $|z_j - z_{j-1}|$ gegen 0 geht. Dieser Limes existiert (wie man aus Analysis 2 wissen sollte), lässt sich auf diesem Weg aber nur ausnahmsweise berechnen etwa für konstante Funktionen $f \equiv c$: Unabhängig vom Weg und der Unterteilung hängen alle Summen hier nur von den Endpunkten des Weges ab:

$$\int_{\gamma} c dz = c \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)).$$

Aus einfachen Stetigkeitsargumenten und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ergibt sich wie in der Analysis 2 ein elegantere Zurückführung auf Integrale in einer Variablen

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

(hier also aufzuteilen in Real- und Imaginärteil). Wir werden aus der Substitutionsregel folgern, dass dieses Integral unabhängig von der Parameterdarstellung des Weges γ ist. Sind $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, so ist

$$\gamma: [a, c] \rightarrow \mathbb{C} = \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b, c] \end{cases}$$

ein Weg, die *Verkettung* $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ von γ_1 und γ_2 . (Wir verwenden die Konvention der Verkettung von Abbildungen und schreiben den Weg, der als erstes in der Verkettung durchlaufen wird, als hinteres Argument von \circ .)

Auch wenn γ_1 und γ_2 stetig differenzierbar sind, so ist γ dies im Punkt b nicht. Um dieses Problem zu beheben, erweitern wir die Definition des Wegintegrals. Ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig differenzierbar* oder *stückweise glatt*, falls es Zwischenpunkte $a_0 = a, a_1, a_2, \dots, a_n = b$ gibt, sodass $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ stetig differenzierbar ist für alle $i = 1, \dots, n$. In diesem Fall differenzieren wir das *Wegintegral* von $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ längs γ als

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Wir vereinbaren, dass ab sofort ein Weg γ , wenn er im Symbol $\int_{\gamma} f dz$ auftaucht, automatisch stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Wie in der Analysis zeigt man, dass obige Definition des Wegintegrals nicht von der Wahl der Zwischenpunkte a_2, \dots, a_{n-1} abhängt, indem man zu einer geeigneten Verfeinerung übergeht.

6.1 Unabhängigkeit von Weg und Parametrisierung

Hängt das Wegintegral $\int_{\gamma} f dz$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab? Es kommt auf f an und im Allgemeinen lautet die Antwort nein, wie folgendes Lemma zeigt. Es ist die zentrale Beobachtung der Funktionentheorie.

Lemma 6.1 Sei $\gamma(t) = c + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ der Weg längs des Randes ∂B der Kreisscheibe $B = B_r(c)$, umlaufen gegen den Uhrzeigersinn. Dann gilt für $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\partial B} (z - c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Im Folgenden sei der Rand einer Kreisscheibe immer durch einen solchen Weg entgegen dem Uhrzeigersinn parametrisiert, falls nicht explizit anders angegeben.

Beweis: Es ist $\gamma'(t) = i \cdot r \cdot e^{it}$, also

$$\int_{\partial B} (z - c)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n i r e^{it} dt = r^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt.$$

Für $n \neq -1$ ist $\frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t}$ eine Stammfunktion des Integranden und daher das Integral gleich null. Für $n = -1$ ist der Integrand konstant und das Ergebnis folgt unmittelbar. \square

Die obige Bemerkung über die Weg(un)abhängigkeit folgt hieraus, wenn man den Rand von $B_r(c)$ zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten links- oder rechtsherum durchläuft. Für $n = -1$ hängt das Ergebnis in der Tat vom Weg ab.

Anders verhält es sich, wenn man einen gegebenen Weg zwar in gleicher Richtung, aber langsamer oder schneller durchläuft, den Weg *umparametrisiert*. Dies ist die erste einer Reihe von Eigenschaften von Wegintegralen, die wir aus der Analysis zusammenfassen.

Definition 6.2 Zwei Wege $\gamma_1 : I_1 = [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : I_2 = [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ heißen äquivalent, falls es eine stetig differenzierbare Bijektion $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ gibt mit $\varphi(a_1) = a_2$ und $\varphi(b_1) = b_2$ und $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$.

Proposition 6.3 Sind γ_1 und γ_2 äquivalent, so ist $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$.

Beweis : Dies folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel. Ist $I_K = [a_K, b_K]$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f dz &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(\varphi(t))) (\gamma_2 \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(\varphi(t))) \gamma_2'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = \int_{\gamma_2} f dz. \end{aligned}$$

□

Komplexe Wegintegrale sind linear im Argument f , ist $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ die Verkettung zweier Wege, so gilt nach Definition

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

Eine grobe Abschätzung für Wegintegrale ist durch

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq |f|_{\gamma} L(\gamma), \quad \text{wobei} \quad |f|_{\gamma} := \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))|,$$

gegeben. Dabei ist $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ die Länge des Weges. Dies kann man direkt aus der Definition des Kurvenintegrals ableiten, folgt aber auch aus der Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f(dz) \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt$$

für stetig differenzierbare Wege und im Allgemeinen durch Zerlegung des Weges in seine stetig differenzierbaren Teilwege.

Ist $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge, die auf einem Gebiet $D \supseteq \gamma([a, b])$ gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|_\gamma = 0$. Als Konsequenz hiervon und der obigen Abschätzung erhalten wir:

Proposition 6.4 Falls $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig konvergiert, so kann man Limes und Wegintegral vertauschen, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) dz$$

Damit ist klar, dass Kurvenintegrale über Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen gegeben sind, gliedweise berechnet werden können: Man beachte dazu, dass Wege in offenen Kreisscheiben immer schon in kleineren abgeschlossenen Kreisscheiben verlaufen (warum?).

6.2 Stammfunktionen

Wir nennen $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, falls sie den äquivalenten Eigenschaften der folgenden Proposition genügt.

Proposition 6.5 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- i) F ist holomorph in D und es gilt $F' = f$.
- ii) Für jeden Weg in D mit Anfangspunkt $x = \gamma(a)$ und Endpunkt $y = \gamma(b)$ gilt $\int_{\gamma} f dz = F(y) - F(x)$.

Beweis : Sei i) vorausgesetzt. Wenn wir ii) für einen stetig differenzierbaren Weg gezeigt haben, folgt der allgemeine Fall offensichtlich durch Addition der Beiträge der Teilstücke des Wegs. Ist γ stetig differenzierbar, so ist diese Implikation Folge des Hauptsatzes. Hauptaussage der Proposition ist also die Umkehrung. Sei dazu $z_0 \in D$ beliebig und $\bar{B} \subset D$ eine Kreisscheibe um z_0 . Nach Voraussetzung ist

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0, z]} f d\zeta \quad \text{für alle } z \in B.$$

Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$F_1(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f d\zeta \text{ für } z \in B \setminus \{z_0\}$$

und wollen zeigen, dass er sich durch $F_1(z_0) = f(z_0)$ stetig fortsetzen lässt. Wegen $\int_{z_0}^z d\zeta = z - z_0$ gilt

$$\begin{aligned} \left| F_1(z) - f(z_0) \right| &= \frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - z_0|} \sup_{x \in [z_0, z]} |f(x) - f(z_0)| \cdot |z - z_0| \leq \sup_{x \in \bar{B}} |f(x) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Wir können nun die Kreisscheibe um z_0 kleiner und kleiner wählen und dann folgt die Stetigkeit von F_1 aus der Stetigkeit von f . \square

Für viele Funktionen lassen sich Stammfunktionen direkt angeben, z.B. ist für $n \geq 0$ die Stammfunktion von $f(z) = z^n$ auf $D = \mathbb{C}$ die Funktion $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$. Daraus folgt auch, dass konvergente Potenzreihen stets eine Stammfunktion besitzen, die wir durch gliedweise Integration erhalten. Wir sagen, dass f auf D integrierbar ist, falls f eine Stammfunktion F besitzt, und suche nach Kriterien hierfür.

Proposition 6.6 *Ist f auf D stetig, so ist f integrierbar genau dann, wenn für jeden geschlossenen Weg γ gilt $\int_{\gamma} f dz = 0$.*

In diesem Fall erhält man eine Stammfunktion, indem man irgendeinen Punkt $z_0 \in D$ wählt und F definiert durch

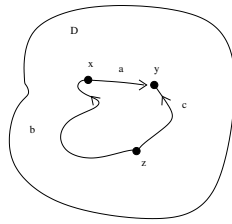
$$F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei γ irgendein Weg von z_0 nach z in D ist.

Beweis : Die eine Implikation folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz. Für die andere zeigen wir, dass das angegebene F in der Tat eine Stammfunktion ist, indem wir das Kriterium der vorigen Proposition anwenden. Sei γ ein Weg von x nach y . Wir wählen Wege γ_1 von z_0 nach x und γ_2 von z_0 nach y . Dann ist $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma$ ein geschlossener Weg. Also

$$0 = \int_{\gamma} f dz - \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma} f dz - F(y) + F(x),$$

was zu zeigen war. \square



Eine Eigenschaft „für jeden Weg“ zu prüfen, ist für eine abstrakt gegebene Funktion immer noch unpraktisch. Wir wollen ein konkreteres Kriterium.

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, falls es ein $z_1 \in M$ gibt, sodass zu jedem $z \in M$ auch die gesamte Strecke $[z_1, z]$ in M liegt. Wir nennen z_1 auch ein *Zentrum* von M .

Eine konvexe Menge ist sternförmig und jeder Punkt in einer konvexen Menge kann als z_1 gewählt werden. Insbesondere sind Kreisscheiben sternförmig. Die punktierte Ebene \mathbb{C}^* ist nicht sternförmig.

Satz 6.7 Sei das Gebiet D sternförmig mit Zentrum z_1 . Sei f stetig auf D und für den Rand $\partial\Delta$ jedes Dreiecks Δ , das (samt seinem Inneren) in D enthalten ist und z_1 als Eckpunkt hat, gelte $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$. Dann ist f integrierbar und

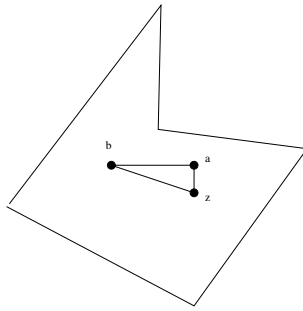
$$F(z) = \int_{[z_1, z]} f(\zeta) d\zeta$$

eine Stammfunktion.

Beweis : Wir betrachten nochmals den Beweis der Implikation $ii) \Rightarrow i)$ der Proposition 6.5. Wir haben dort Holomorphie von F und $F' = f$ nachgewiesen, indem wir für z_0 nahe beim Untersuchungspunkt z_0 die Stetigkeit der Differenzquotientenfunktion F_1 gezeigt haben. In dieser Situation liegt das Dreieck $\Delta(z_1, z_0, z)$ ganz in D und die Voraussetzung besagt

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0, z]} f d\zeta.$$

Nur diese Gleichung und die Stetigkeit von f haben wir in obigem Beweis verwendet. □



7 Der Cauchysche Integralsatz

7.1 Das Goursat-Lemma und der Cauchy-Integralsatz

Das folgende Lemma besagt, dass für holomorphe Funktion die Voraussetzung des Integrabilitätskriteriums aus dem vorigen Abschnitt erfüllt ist. Man beachte, dass wir im Goursat-Lemma nicht voraussetzen, dass f' stetig ist. Mit dieser Voraussetzung folgt das Lemma leicht aus dem Satz von Stokes aus der reellen Analysis. Wie im Satz 6.7 ist „ $\Delta \subset D$ “ so zu lesen, dass das Dreieck samt seinem Inneren in D enthalten ist.

Lemma 7.1 (Goursat) Sei f holomorph auf dem Gebiet D . Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset D$

$$\int_{\partial\Delta} f dz = 0.$$

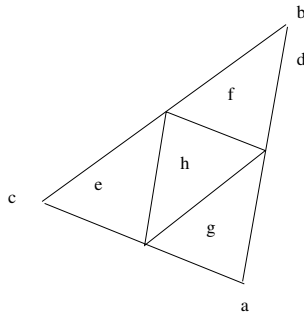
Beweis : Wir unterteilen das Dreieck Δ in 4 kongruente Teildreiecke, wovon Δ_4 das mittlere ist und als Eckpunkte die Seitenmitten von Δ hat.

Dann ist nach der Dreiecksungleichung offenbar

$$\max_{w,z \in \Delta} |w - z| \leq L(\partial\Delta) \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta_i) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta)$$

für $i = 1, 2, 3, 4$. Wir schreiben abkürzend $a(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f dz$, wobei wir den Rand immer einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wollen. Damit gilt

$$a(\Delta) = \sum_{j=1}^4 a(\Delta_j),$$



denn die Wege im Inneren von Δ werden bei der Summe auf der rechten Seite zweimal und in verschiedener Orientierung durchlaufen. Wir wählen unter den 4 Teildreiecken von Δ dasjenige aus, in dem $|a(\Delta_j)|$ maximal ist und nennen es Δ^1 . Also ist $|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)|$. Wir unterteilen Δ^1 wieder, bezeichnen das Teildreieck mit maximalem $|a(\Delta_j^1)|$ mit Δ^2 und so weiter. Man erhält also eine Folge von Dreiecken Δ^j mit $|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $z_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n$. Da f holomorph ist, gibt es eine stetige Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z_0) = 0$, sodass für alle $z \in D$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)g(z).$$

Da konstante und lineare Funktionen Stammfunktionen besitzen, ist

$$\int_{\partial\Delta^n} f(z_0) dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial\Delta^n} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Also ist

$$a(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} (z - z_0)g(z) dz \quad \text{mit} \quad |z - z_0| \leq L(\partial\Delta^n).$$

Aus der Anfangsbemerkung folgt $L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta)$ für alle $n \geq 1$ und aus der Standardabschätzung für Integrale

$$\begin{aligned} |a(\Delta)| &\leq 4^n |a(\Delta^n)| \leq 4^n L(\partial\Delta^n) L(\partial\Delta^n) \cdot \sup_{z \in \partial\Delta^n} |g(z)| \\ &\leq L(\partial\Delta)^2 \cdot \sup_{z \in \partial\Delta^n} |g(z)|. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von g und $g(z_0) = 0$ impliziert, dass es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $\sup_{z \in B_\delta(z_0)} |g(z)| < \varepsilon$. Wegen $z_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n$ gibt es ein N_0 , sodass $\Delta^n \subset B_\delta(z_0)$ für alle $n \geq N_0$. Also ist für diese $n \geq N_0$

$$|a(\Delta)| \leq L(\partial\Delta)^2 \cdot \varepsilon.$$

Da $L(\partial\Delta)$ fest, aber ε beliebig wählbar ist, folgt die Behauptung. □

Satz 7.2 (Cauchy) Sei das Gebiet G sternförmig mit Zentrum z_0 und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f integrierbar auf G und die Funktion

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f d\zeta$$

ist eine Stammfunktion.

Beweis : Dies ist nun nicht mehr als die Aussagen des Goursat-Lemmas und des Integrabilitätskriteriums Satz 6.7 zusammengenommen. \square

Folgerung 7.3 Unter den gleichen Voraussetzungen gilt $\int_{\gamma} f dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg in G .

7.2 Die Cauchy-Integralformel

Die Integrale der Potenzreihenterme $(z - z_0)^n$ entlang des Randes einer Kreisscheibe mit Zentrum z_0 haben wir für alle n in Lemma 6.1 einfach ausrechnen können. Ist $\gamma = \partial B_r(c) \subseteq D$ ein geschlossener Weg entlang des Randes einer Kreisscheibe, die nicht in z_0 zentriert ist, so ist die direkte Bestimmung des Integrals von $(z - z_0)^n$ für $n < 0$ nicht einfach. Folgendes Lemma hilft dank des Cauchy-Integralsatzes.

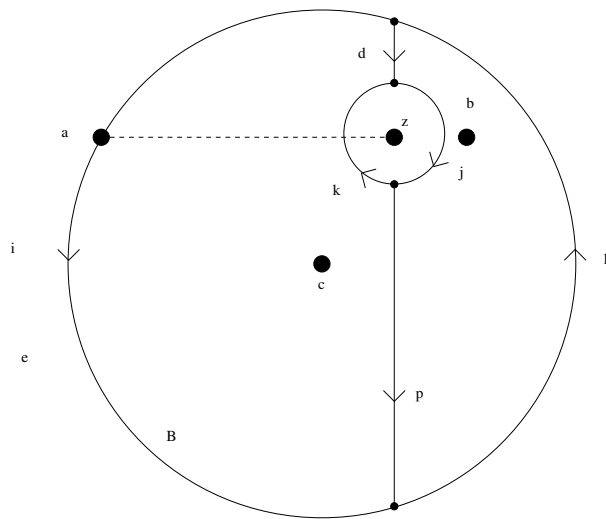
Lemma 7.4 Sei $g : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet D , $B = B_r(c)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B} \subset D$ und z_0 im Inneren von B . Sei γ der Weg längs des Randes einer beliebigen Kreisscheibe in D mit Mittelpunkt z_0 . Dann gilt

$$\int_{\partial B} g dz = \int_{\gamma} g dz.$$

Beweis : Sei $B^* \supsetneq B_r(c)$ eine etwas größere Scheibe mit Mittelpunkt c , $\overline{B^*} \subset D$ und $a \in \partial B^*$ so, dass $B^* \setminus [a, z_0]$ ein Sterngebiet mit Zentrum $b \in B^*$ wie im folgenden Bild ist. (In der Zeichnung wird der Einfachheit halber $B = B^*$ gesetzt.)

Dann ist $\partial B = \gamma_2 \circ \gamma_1$ und $\gamma = (\gamma_4 \circ \gamma_3)^{-1}$. Wir betrachten außerdem $\tau = \beta \circ \gamma_3 \circ \alpha \circ \gamma_1$ und $\tau' = \beta \circ \gamma_4^{-1} \circ \alpha \circ \gamma_2^{-1}$. Wie schon in der Analysis 2 ist unter γ^{-1} der umgekehrt durchlaufene Weg zu verstehen, also

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(b + a - t) \quad \text{für} \quad \gamma : [a, b] \rightarrow D, \quad \text{somit} \quad \int_{\gamma^{-1}} g dz = - \int_{\gamma} g dz.$$



Da $B^* \setminus [a, z_0]$ ein Sterngebiet und g dort holomorph ist, folgt $\int_{\tau} g dz = 0$. Mit dem spiegelsymmetrisch gleichen Argument folgt $\int_{\tau'} g dz = 0$. Also ist

$$0 = \int_{\tau} g dz - \int_{\tau'} g dz = \int_{\gamma_1} g dz + \int_{\gamma_2} g dz + \int_{\gamma_3} g dz + \int_{\gamma_4} g dz$$

und daraus folgt unmittelbar die Behauptung. \square

Beispiel: Für eine Kreisscheibe B gilt nach obigem Lemma und Lemma 6.1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 1 & \text{falls } z_0 \in B \\ 0 & \text{falls } z_0 \notin \bar{B}. \end{cases}$$

Korollar 7.5 Ist D ein Gebiet, g holomorph in $D \setminus \{z_0\}$ und in einer Umgebung U von $z_0 \in B$ beschränkt, $B = B_r(z_0)$ mit $\bar{B} \subset D$, so ist $\int_{\partial B} g dz = 0$.

Beweis : Sei $M \geq \sup_{z \in U} |g(z)|$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle den Weg γ als Rand einer Kreisscheibe vom Radius $r = \frac{\varepsilon}{2\pi M}$ um z_0 . Dann gilt

$$\left| \int_{\partial B} g dz \right| = \left| \int_{\gamma} g dz \right| \leq M \cdot 2\pi \cdot r \leq \varepsilon.$$

Beliebiges Verkleinern von ε zeigt die Behauptung. \square

Satz 7.6 (Cauchy-Integralformel) Sei f holomorph auf dem Gebiet D und $B = B_r(z_0)$ eine Kreisscheibe mit $\bar{B} \subseteq D$. Dann gilt für alle $z \in B$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Der Satz ist erstaunlich, da es genügt, f auf dem Rand einer Kreisscheibe zu kennen, um sämtliche Werte im Innern rekonstruieren zu können. Dies trifft für C^∞ -Funktionen überhaupt nicht zu, und hiermit beginnen die wirklichen Unterschiede zwischen der Funktionentheorie und der reellen Analysis.

Beweis : Wir fixieren $z \in B$ und betrachten die Hilfsfunktion

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ für } \zeta \in D \setminus \{z\},$$

welche wir mit $f'(z)$ nach z stetig fortsetzen. g ist offenbar holomorph auf $D \setminus \{z\}$ und beschränkt auf \bar{B} . Nach dem vorigen Korollar gilt

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial B} g d\zeta &= \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot 2\pi i. \end{aligned}$$

□

7.3 Entwicklung in Potenzreihen

Von einer Potenzreihe wissen wir bereits nach Satz 5.9, dass sie unendlich oft komplex differenzierbar ist. Wir zeigen nun, dass jede holomorphe Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar, also *analytisch* ist.

Lemma 7.7 Sei γ ein geschlossener Weg und $f: \text{Bild}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann definieren wir auf $D = \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Die Funktion ist auf D holomorph. Ist $z_0 \in D$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

normal auf jeder Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset D$. Darüber hinaus ist \tilde{f} unendlich oft komplex differenzierbar und es gilt

$$\tilde{f}^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad \text{für alle } z \in D, k \in \mathbb{N}_0.$$

Achtung: Dieses D ist in der Regel kein Gebiet, sondern wird in mehrere Gebiete zerfallen, die durch Bild (γ) voneinander getrennt sind. In den verschiedenen Gebieten kann \tilde{f} ganz verschieden aussehen, vgl. das Beispiel vor Korollar 7.5.

Beweis : Sei $B = B_r(z_0)$ mit $\bar{B} \subset D$ fixiert. Durch Induktion über k beweist man

$$\frac{1}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} w^{n-k} = \sum_{m \geq 0} \binom{m+k}{k} w^m.$$

Diese Reihe konvergiert auf der Einheitskreisscheibe, wie man mit dem Quotientenkriterium direkt nachprüft. Der Punkt $w = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$ liegt für $\zeta \in \text{Bild}(\gamma)$ in der Einheitskreisscheibe. Für diesen gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1} (1-w)^{k+1}} &= \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n-k} \cdot \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \\ &= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

Wir schreiben kurz $g_n(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{n+1}$ für $\zeta \in \text{Bild}(\gamma)$. Dann ist

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n \geq k} k! \binom{n}{k} g_n(\zeta) (z - z_0)^{n-k} \cdot d\zeta.$$

Wir wollen zeigen, dass die Reihe unter dem Integral normal konvergiert. Da $|\zeta - z_0| > r$ für $\zeta \in \text{Bild}(\gamma)$, gilt mit der Notation $|h|_{\gamma} := \sup_{x \in \text{Bild}(\gamma)} |h(x)|$ die Abschätzung $|g_n|_{\gamma} \leq r^{-(n+1)} |f|_{\gamma}$. Also ist

$$\sup_{\zeta \in \text{Bild}(\gamma)} |g_n(\zeta) (z - z_0)^{n-k}| \leq \frac{1}{r^{k+1}} |f|_{\gamma} \cdot q^{n-k}, \quad \text{wobei } q = \frac{|z - z_0|}{r}.$$

Da $|q| < 1$, ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq k} k! \binom{n}{k} g_n(\zeta) (z - z_0)^{n-k} \right| &\leq \frac{k! |f|_{\gamma}}{r^{k+1}} \cdot \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} q^{n-k} \\ &= \frac{k! |f|_{\gamma}}{r^{k+1}} \cdot \frac{1}{(1-q)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Wir können also Reihe und Integral vertauschen und erhalten mit a_n wie oben.

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n \geq k} k! \binom{n}{k} a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Für $k = 0$ besagt dies, dass obiges \tilde{f} durch eine auf B konvergente Potenzreihe dargestellt wird. Diese ist unendlich oft differenzierbar und ihre k -te Ableitung steht in der vorigen Formel rechts. \square

Ist f die Einschränkung einer holomorphen Funktion auf den gegebenen Weg $\gamma = \partial B$ wie in Satz 7.6, so ist \tilde{f} (wie oben definiert) in B gleich f nach der Cauchyschen Integralformel. Dies beweist folgenden Entwicklungssatz.

Satz 7.8 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$. Sei $B_r(z_0) \subseteq D$ eine Kreisscheibe um z_0 . Dann ist f um z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar, d.h. mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

und $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $0 < \rho < r$ konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ auf $B_r(z_0)$ normal gegen f . Insbesondere ist f unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

8 Konsequenzen aus den Cauchy-Sätzen

8.1 Einige Highlights

Lemma 8.1 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet D und $\not\equiv 0$. Dann sind die Nullstellen von f isolierte Punkte von D .

Beweis : Sei $z_0 \in D$ eine Nullstelle von f . Da f in einer Umgebung von z_0 durch eine Potenzreihe dargestellt wird, können wir zwei Möglichkeiten unterscheiden:

1. Die Koeffizienten sind nicht alle $= 0$. In diesem Fall zerlegen wir die Potenzreihe in ein Produkt

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot (a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots), \quad a_n \neq 0,$$

dessen erster Faktor nur in z_0 verschwindet und dessen zweiter Faktor in einer hinreichend kleinen Umgebung $\neq 0$ ist – solange $|a_n|$ größer als der Betrag des Reihenrests bleibt. In dieser Umgebung ist jedenfalls z_0 die einzige Nullstelle.

2. Die Potenzreihe ist $\equiv 0$. Dann verschwindet auch die dargestellte Funktion f in einer Umgebung von z_0 .

Diese Typen von Punkten bilden demnach zwei offene disjunkte Untermengen von D . Da D zusammenhängend ist, muss eine dieser Untermengen leer sein; nach Voraussetzung gibt es also nur isolierte Nullstellen von f . \square

Einen Punkt z_0 wie im ersten Teil des Beweises nennt man eine *Nullstelle der Ordnung n* von f .

Satz 8.2 (Identitätssatz) Seien f, g zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet D und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in D konvergente Folge paarweise verschiedener Punkte. Wenn $f(z_n) = g(z_n)$ für alle n , stimmen f und g auf ganz D überein.

Beweis : Andernfalls wäre $z_0 := \lim z_n$ eine nicht-isolierte Nullstelle der holomorphen Funktion $f - g$. \square

Definition 8.3 Eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion heißt eine „ganze“ Funktion.

Satz 8.4 (Liouville) Beschränkte ganze Funktionen sind konstant.

Beweis : Sei $|f|_{\mathbb{C}} = C$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist nach der Cauchyschen Integralformel

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \quad \text{also} \quad |f'(z)| \leq r \cdot \frac{C}{r^2},$$

was für $r \rightarrow \infty$ beliebig klein wird. Daraus folgt $f' \equiv 0$, ebenso alle höheren Ableitungen. Die Potenzreihenentwicklung von f zeigt also, dass f konstant sein muss. \square

Satz 8.5 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nicht-konstante Polynom aus $p \in \mathbb{C}[z]$ besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis : Andernfalls wäre $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto p(z)^{-1}$ eine ganze Funktion. Das steht im Widerspruch zum Satz von Liouville, weil dann $1/p(z)$ beschränkt wäre: Aus $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ und $n > 0, a_n \neq 0$ folgt

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_n z^n} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right)^{-1}.$$

Für $|z| \rightarrow \infty$ konvergiert der erste Faktor gegen 0, der zweite Faktor gegen 1, und in endlichen abgeschlossenen Kreisscheiben $\overline{B_r(0)}$ wäre $1/p(z)$ als stetige Funktion beschränkt, wenn p keine Nullstelle hätte. \square

Ist z_1 eine Nullstelle von p , so lässt sich p durch $z - z_1$ dividieren, und es entsteht ein Polynom vom Grad $n - 1$, auf das sich der Satz wieder anwenden lässt. Sukzessive Division ergibt also die

Folgerung 8.6 \mathbb{C} ist ein „algebraisch abgeschlossener Körper“, d.h. jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ zerfällt in ein Produkt von Linearfaktoren.

Insbesondere zerfallen auch reelle Polynome über \mathbb{C} in Linearfaktoren. Wendet man die komplexe Konjugation auf diese Polynome an, bleiben ihre Koeffizienten invariant, also müssen die nicht-reellen Linearfaktoren in Paare von konjugiert komplexen zerfallen. Wegen

$$(z - w)(z - \bar{w}) = z^2 - 2 \operatorname{Re}(w)z + |w|^2 \in \mathbb{R}[z]$$

gewinnt man daraus somit auch ein Resultat über die Zerlegung reeller Polynome:

Folgerung 8.7 Alle reellen Polynome $p \in \mathbb{R}[x]$ zerfallen in lineare oder quadratische Faktoren $\in \mathbb{R}[x]$.

Satz 8.8 (Cauchy-Ungleichungen) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $B := B_r(z_0)$, $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ und $|f|_{\partial B} =: M(r)$. Dann ist

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Beweis : folgt mit der üblichen Integralabschätzung aus Satz 7.8. \square

Ebenso zeigt Satz 7.8, dass $f(z_0)$ die Rolle eines Mittelwerts auf ∂B spielt, denn mit der üblichen Parametrisierung $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ wird

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt .$$

Wir werden diese Mittelwerteigenschaft ausnutzen, um das *Maximumsprinzip* für holomorphe Funktionen zu zeigen:

Satz 8.9 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet D , und $|f|$ besitze in $z_0 \in D$ ein lokales Maximum. Dann ist f eine konstante Funktion.

Beweis : Zur Vereinfachung dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $z_0 = 0$ ist (Translation) und dass $f(0)$ positiv reell ist (im Fall $f(0) = 0$ wende man den Identitätssatz an, bei $f(0) \neq 0$ multipliziere man mit einem geeigneten Faktor $e^{i\varphi}$). Dann ist also für hinreichen kleines $r > 0$ und alle φ

$$0 < f(0) \geq |f(re^{i\varphi})| \geq \operatorname{Re} f(re^{i\varphi}) \quad \Rightarrow$$

$$M(r) \leq f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{it}) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r) dt = M(r) ,$$

also mit Gleichheit an allen Stellen der letzten Ungleichungskette. Da $\operatorname{Re} f$ stetig ist, kann das aber nur für $\operatorname{Re} f(re^{i\varphi}) \equiv M(r)$ und $\operatorname{Im} f(re^{i\varphi}) \equiv 0$ eintreten; nach dem Identitätssatz muss f konstant sein. \square

Durch Anwendung auf die Funktion $1/f$ ergibt sich daraus die

Folgerung 8.10 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen auf dem Gebiet D , und $|f|$ besitze in $z_0 \in D$ ein lokales Minimum. Dann ist f eine konstante Funktion.

Folgerung 8.11 Sei D ein beschränktes Gebiet in \mathbb{C} , $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und auf D holomorph. Dann nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von D an (und falls f keine Nullstellen hat, auch sein Minimum).

8.2 Singularitäten

Gegenstand dieses Abschnitts ist die Frage: Was kann in und rund um isolierte Punkte $z_0 \in D$ mit einer holomorphen Funktion $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ passieren? Solche Punkte z_0 werden als *Singularitäten* von f bezeichnet, auch wenn – wie wir

gleich sehen werden – das Verhalten von f in und um z_0 recht überschaubar ist und durch drei verschiedene Möglichkeiten beschrieben werden kann. Wir brauchen zunächst ein Hilfsmittel, das als eine Art Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes gelten kann.

Lemma 8.12 (Satz von Morera) D sei ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$ für alle Dreiecke $\Delta \subset D$, ist f holomorph.

Beweis : Zum Nachweis der Holomorphie können wir uns auf kleine offene Kreisscheiben in D beschränken; diese sind sternförmig, also können wir aus Satz 6.7 entnehmen, dass f dort eine Stammfunktion F besitzt. Folglich sind nach Satz 7.8 auch alle Ableitungen von F holomorph. \square

Satz 8.13 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) D sei ein Gebiet, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt in einer punktierten Umgebung $U := U(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dann lässt sich f nach z_0 holomorph fortsetzen, d.h. es existiert eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}(z) = f(z)$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$.

Beweis : Nach Voraussetzung gibt es ein reelles $C \geq 0$ mit $|f|_U = C$, demnach ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = 0,$$

und wir können $g(z) := (z - z_0)f(z)$ durch den Wert $g(z_0) := 0$ stetig in den Punkt z_0 fortsetzen. Nun besitzt diese fortgesetzte Funktion (nennen wir sie nach wie vor g) genau wie in Korollar 7.5 die Eigenschaft $\int_{\partial\Delta} g dz = 0$ für alle Dreiecke $\Delta \subset U$, sie ist also nach dem Satz von Morera holomorph in U und hat wegen ihrer Nullstelle in z_0 eine Potenzreihenentwicklung

$$\sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n$$

mit positivem Konvergenzradius; wir können also \tilde{f} in einer Umgebung von z_0 ansetzen als

$$\tilde{f}(z) := \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

\square

Zur Beschreibung des nächsten Typs von Singularitäten führen wir folgende Notation ein: Wenn $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, sei

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad :\iff \quad \forall M > 0 \exists \varepsilon > 0 \quad \text{mit} \quad |f(z)| > M \quad \forall z \quad \text{mit} \quad |z - z_0| < \varepsilon.$$

In diesem Fall nennen wir z_0 einen *Pol* von f . Genauer sprechen wir von einem *Pol der Ordnung n* , wenn $n \in \mathbb{N}$ gewählt wird wie in den Äquivalenzen des folgenden Satzes.

Satz 8.14 *D sei ein Gebiet, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *f hat einen Pol der Ordnung n in z_0 , also $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.*
- *$1/f$ ist in einer Umgebung von z_0 holomorph und hat eine hebbare Singularität mit Nullstellenordnung n in z_0 .*
- *In einer Umgebung von z_0 wird f durch eine normal konvergente Reihe*

$$\sum_{m \geq -n} a_m (z - z_0)^m = a_{-n} (z - z_0)^{-n} + a_{-n+1} (z - z_0)^{-n+1} + \dots \quad \text{mit } a_{-n} \neq 0$$

beschrieben.

Beweis : Klar: Aus $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ folgt, dass f in einer punktierten Umgebung von z_0 keine Nullstelle hat und dass $1/f$ dort beschränkt ist. Damit kann man den Riemannschen Hebbarkeitssatz anwenden mit einer Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k \geq n} c_k (z - z_0)^k, \quad \text{dabei } c_n \neq 0,$$

also $1/f(z) = (z - z_0)^n \cdot h(z)$ mit einer holomorphen Funktion h ohne Nullstellen in einer kleinen Umgebung von z_0 . Dort ist auch $1/h$ holomorph mit einer Potenzreihenentwicklung $\sum_{k \geq 0} a_{-n+k} (z - z_0)^k$, dabei $a_{-n} \neq 0$, damit folgt die dritte Aussage. Wie man aus der dritten Aussage die erste folgert, dürfte auch klar sein. \square

Wenn D ein Gebiet ist, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und z_0 weder hebbare Singularität noch Pol ist, heißt z_0 eine *wesentliche Singularität*. Auch dieser Fall lässt sich durch das Verhalten von f in einer Umgebung von z_0 charakterisieren:

Satz 8.15 (Casorati–Weierstrass) *Für jede Umgebung U einer wesentlichen Singularität z_0 von f liegt $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in \mathbb{C} , d.h. für jedes $a \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $z \in U$ mit $|f(z) - a| < \varepsilon$.*

Eigentlich ist dieser Satz nur eine schwache Form eines viel besseren Resultats, nämlich des *großen Satzes von Picard*: *f nimmt in $U \setminus \{z_0\}$ jeden komplexen Wert mit höchstens einer Ausnahme an.* Dieser Satz ist optimal, denn ein Ausnahmewert kann immer

vorkommen, wie das Beispiel $f(z) = e^{1/z}$ zeigt; hier ist 0 eine wesentliche Singularität, in deren Umgebung jeder Wert mit Ausnahme von 0 angenommen wird. Der Beweis des Satzes von Picard würde aber den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

Beweis : Angenommen, der Satz von Casorati–Weierstrass wäre falsch. Dann gäbe es eine Umgebung U von z_0 , einen Wert $a \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ so dass $|f(z) - a| \geq \varepsilon$ in ganz U wäre, $g(z) := (f(z) - a)^{-1}$ wäre also beschränkt in U und hätte somit eine holomorphe Fortsetzung nach z_0 , dort aber höchstens eine isolierte Nullstelle. $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$ hat also in z_0 eine hebbare Singularität oder einen Pol. \square

9 Laurentreihen und der Residuensatz

9.1 Laurentreihen und Holomorphie in Kreisringen

Auch wesentliche Singularitäten sind an einer Reihenentwicklung erkennbar.

Satz 9.1 *D sei ein Gebiet, f holomorph in $D \setminus \{z_0\}$. Genau dann hat f eine wesentliche Singularität in z_0 , wenn f in einer punktierten Umgebung $U \setminus \{z_0\}$ von z_0 eine normal konvergente Reihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

mit unendlich vielen $a_n \neq 0$, $n < 0$, besitzt.

„Konvergenz“ heißt hier natürlich, dass beide Reihen $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ und $\sum_{n > 0} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ (normal) konvergieren. Eine solche Reihe mit positiven und negativen Exponenten für $(z - z_0)$ nennt man *Laurentreihe*; ihr Anteil $\sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n$ heißt der *Hauptteil*. Laurentreihen mit Hauptteil 0 beschreiben also hebbare Singularitäten, solche mit Hauptteil aus endlich vielen Gliedern $\neq 0$ beschreiben Pole. Ein Beispiel einer Laurentreihe für eine wesentliche Singularität ist die schon genannte Funktion

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! z^n}.$$

Aus Lemma 6.1 ergibt sich, dass für die Berechnung von Integralen über geschlossene Wege um die Singularitäten herum der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe besonders wichtig ist; er wird als das *Residuum* von f in z_0 bezeichnet.

Den Beweis des Satzes werden wir in allgemeinerem Rahmen führen, nämlich mit einer Untersuchung von Funktionen, die in einem Kreisring

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$$

holomorph sind; der Spezialfall $\rho_1 = 0$ entspricht dann dem einer isolierten Singularität. Zur Vereinfachung der Notationen setzen wir $z_0 = 0$. Wir beginnen mit der einfacheren Feststellung, dass Laurentreihen tatsächlich holomorphe Funktionen darstellen:

Lemma 9.2 Wenn $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ den Konvergenzradius $\rho_2 > 0$ besitzt und $\sum_{n > 0} a_{-n} w^n$ den Konvergenzradius $1/\rho_1$, dabei $\rho_1 < \rho_2$, dann ist $f(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ holomorph im Kreisring $\rho_1 < |z| < \rho_2$.

(Wieder ist ∞ als Konvergenzradius zugelassen, und $1/\infty$ lesen wir als 0.)

Beweis : Klar, dass die erste der beiden Reihen eine holomorphe Funktion in der Kreisscheibe $B_{\rho_2}(0)$ beschreibt. Analog ist die zweite Reihe holomorph (in w) in $|w| < \frac{1}{\rho_1}$, insbesondere gliedweise differenzierbar nach w . Setzt man nun $w = 1/z$, multiplizieren sich beim Ableiten nach z alle Glieder mit der inneren Ableitung $-1/z^2$, aber normale Konvergenz, Holomorphie und gliedweise Differenzierbarkeit in $\rho_1 < |z|$ bleiben erhalten. \square

Lemma 9.3 Sei f holomorph im Kreisring $0 \leq \rho_1 < |z| < \rho_2$, dann lässt sich f in einem verkleinerten Kreisring $0 \leq \rho_1 < r_1 < |z| < r_2 < \rho_2$ schreiben als

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_2}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Beweis : verläuft genau wie jener von Lemma 7.4, nur mit dem Unterschied, dass die beiden Kreise, über die integriert wird, nun konzentrisch sind, aber nicht notwendig das gleiche Wegintegral ergeben; im Innern des kleineren Kreises ist f nicht notwendig holomorph. Entscheidend ist nur, dass der Kreisring sich immer aufteilen lässt in Sterngebiete, so dass die fragliche Integraldifferenz eine Summe von Integralen über geschlossene Wege in diesen Sterngebieten wird. \square

Satz 9.4 Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 9.3 lässt sich f im verkleinerten Kreisring als normal konvergente Laurentreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ schreiben, dabei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} f(\zeta) \zeta^{-n-1} d\zeta \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \quad \text{und alle } r, r_1 \leq r \leq r_2.$$

Beweis : Wie in Lemma 7.4 und in Lemma 9.3 überlegt man sich wieder, dass die Integraldarstellungen für die a_n tatsächlich unabhängig von r sind. Dann verwendet man die Zerlegung von f aus Lemma 9.3 : $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_2}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$ ergibt nach Lemma 7.7 (hier mit $z_0 = 0$) genau eine Potenzreihe mit den angegebenen a_n , $n \geq 0$. Die a_n mit negativen Indizes ergeben sich aus einer entsprechenden Überlegung für $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$. Hier beachte man, dass $|\zeta| < |z|$ ist, dass man also eine Entwicklung

$$-\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = \sum_{m \geq 0} \frac{\zeta^m}{z^{m+1}}$$

in der Rechnung verwenden muss. Im übrigen folgt aber ebenso wie für die positiven Indizes

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{z^{m+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}} f(\zeta)\zeta^m d\zeta$$

wie behauptet. □

Im Extremfall $\rho_1 = 0$ ist damit gleichzeitig nachgewiesen, dass Laurententwicklungen auch in einer Umgebung von wesentlichen Singularitäten existieren.

9.2 Meromorphe Funktionen und der Residuensatz

Eine Funktion f auf einem Gebiet D heißt *meromorph*, wenn sie holomorph ist mit möglicher Ausnahme einer Menge von isolierten Polen z_j . (Wären die Polstellen nicht isoliert, so hätte $1/f$ eine Nullstellenmenge mit Häufungspunkt im Widerspruch zum Identitätssatz.) Aus Lemma 6.1 folgt, dass man geschlossene Wegintegrale nun auch beim Vorliegen von isolierten Singularitäten gut berechnen kann, wenn es gelingt, in den Singularitäten jeweils das Residuum – also den Koeffizienten $a_{-1} =: \text{Res}_{z_j}(f)$ der Laurententwicklung – zu berechnen. Wir beschränken uns auf den allereinfachsten Integrationsweg:

Satz 9.5 (Residuensatz) Sei f holomorph auf dem Gebiet D mit Ausnahme der isolierten Singularitäten $z_1, \dots, z_n \in B_r(z_0)$, $\overline{B_r(z_0)} \subset D$. Dann ist

$$\int_{\partial B_r(z_0)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j}(f).$$

Beweis : Man wähle zu jedem z_j eine kleine Kreisscheibenumgebung $B_{r_j}(z_j)$, die noch ganz in D liegt und keine andere Singularität von f berührt. Dann ist für alle Randintegrale

$$\int_{\partial B_{r_j}(z_j)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_j}(f),$$

und man muss nur den Integrationsweg $\partial B_r(z_0)$ in die Summe dieser Randwege plus eine Reihe von geschlossenen Wegen zerlegen, die in sternförmigen Holomorphiegebieten von f verlaufen. Der Leser überzeuge sich davon, dass das immer geht! □

Der Nutzen des Residuensatzes besteht für viele Gebiete der Mathematik darin, dass die ersten Glieder von Laurentreihen häufig einfacher zu berechnen sind als Integrale; man vergleiche hierzu diverse Übungsaufgaben. Ein Beispiel für eine unerwartete Anwendung besteht im Zählen von Null- und Polstellen. Wenn man unter der *Multiplizität* n einer Nullstelle ihre Ordnung versteht – entsprechend auch für Pole, dann gilt nämlich der

Satz 9.6 (Argumentprinzip) Sei f nicht konstant und meromorph auf dem Gebiet D und besitze weder Nullstellen noch Pole auf dem Rand der Kreisscheibe $B, \bar{B} \subset D$. Sei N die Anzahl der Nullstellen, P die Anzahl der Pole (mit Multiplizität gezählt) von f in B . Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

Beweis : Sei dazu $z_0 \in B$ ein Nullstelle von f der Ordnung n . Aus dem Beweis von Lemma 8.1 wissen wir, dass in einer Umgebung von z_0 die Funktion die Zerlegung $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ besitzt mit einer holomorphen Funktion h , $h(z_0) \neq 0$. Dort ist also

$$\ln(f(z)) = n \ln(z - z_0) + \ln(h(z)) \quad \implies \quad \frac{f'}{f}(z) = \frac{n}{z - z_0} + g(z)$$

mit einer holomorphen Funktion g , somit gilt $\operatorname{Res}_{z_0}(f'/f) = n$. Genauso erhält man bei einem Pol der Ordnung n das Residuum $-n$, daher folgt die Behauptung aus dem Residuensatz. □

10 Die Riemannsche Zahlenkugel

10.1 Viele Definitionen

Als Menge ist die *Riemannsche Zahlenkugel* die Gaußsche Zahlenebene, vereinigt mit einem neuen Punkt namens ∞ , geschrieben $\bar{\mathbb{C}}$ oder $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Um auf $\hat{\mathbb{C}}$ Funktionentheorie zu betreiben, braucht man zunächst eine Topologie: Umgebungen von endlichen Punkten, d.h. von Punkten $z \in \mathbb{C}$, sind alle Teilmengen von $\hat{\mathbb{C}}$, welche eine offene Kreisscheibe $B_r(z)$ enthalten, also alle bisherigen Umgebungen. Diesen darf man aber noch den Punkt ∞ hinzufügen.

Umgebungen $U(\infty)$ sind alle Teilmengen von $\hat{\mathbb{C}}$, die außer ∞ noch eine unbeschränkte Menge vom Typ

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > C\}$$

enthalten, also den Außenraum einer abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius $C > 0$ in \mathbb{C} enthalten (es kommt nicht darauf an, dass 0 der Mittelpunkt dieser Kreisscheibe ist). Man überlegt sich leicht, dass mit dieser Definition eine vernünftige Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ entsteht, die auf \mathbb{C} mit der bisher verwendeten Topologie übereinstimmt: Alle bisher konvergenten Folgen bleiben konvergent, alle bisher stetigen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bleiben stetig. Zusätzlich werden jetzt Folgen $z_n \in \mathbb{C}$ konvergent mit $\lim z_n = \infty$, welche die Eigenschaft

$$\text{für jedes } C \in \mathbb{R}, C > 0, \text{ sind fast alle } |z_n| > C$$

erfüllen. Meromorphe Funktionen f bleiben also stetig (als Abbildungen $D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$) in ihren Polen z_j , wenn wir sie durch die Definition $f(z_j) := \infty$ ergänzen.

Konvention: Diese stetige Ergänzung wollen wir im folgenden überall vornehmen, z.B. vereinbaren wir für Möbiustransformationen

$$M\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \quad \text{wenn } M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } c \neq 0.$$

Für die Topologie ist $\hat{\mathbb{C}}$ die *Alexandroff-* oder *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von \mathbb{C} . Der Grund, warum man von einer *Zahlenkugel* spricht, ist folgende Veranschaulichung: Man stelle sich eine Sphäre S^2 im \mathbb{R}^3 vor und identifiziere die Tangentialebene am Südpol mit der Gaußschen Ebene \mathbb{C} . Den Nordpol der Sphäre bezeichne man mit ∞ ; dann schneidet jede \mathbb{R}^3 -Verbindungsgerade von ∞ zu den Punkten

$z \in \mathbb{C}$ die Sphäre in genau einem Punkt $\neq \infty$, und jeder Punkt aus $S^2 \setminus \{\infty\}$ tritt für genau ein z als ein solcher Schnittpunkt auf, man erhält also eine (in beiden Richtungen stetige) Bijektion

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow S^2 \setminus \{\infty\},$$

die *stereographische Projektion*. Verwendet man diese als Identifikation, erhält S^2 genau die Topologie, die wir oben auf $\hat{\mathbb{C}}$ eingeführt haben. Man kann zeigen, dass diese stereographische Projektion vorzügliche geometrische Eigenschaften hat: Kreise auf \mathbb{C} werden zu Kreisen auf $S^2 \setminus \{\infty\}$, Geraden auf \mathbb{C} zu Kreisen auf S^2 , die nun allerdings durch den Nordpol ∞ laufen. Wir werden deswegen Kreise in \mathbb{C} und Geraden in \mathbb{C} , vereinigt mit ∞ , als $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise bezeichnen. Mittels der geometrischen Interpretation von $\hat{\mathbb{C}}$ als Sphäre können wir auch eine natürliche Metrik auf $\hat{\mathbb{C}}$ einführen, welche die Topologie induziert; diese stimmt auf \mathbb{C} allerdings nicht mit der sonst verwendeten euklidischen Metrik überein.

Wir brauchen mehr als nur Topologie, um Funktionen nicht nur stetig nach ∞ fortzusetzen, sondern dort auch komplexe Differenzierbarkeit einzuführen. Dazu wird $\hat{\mathbb{C}}$ mit der Struktur einer *Riemannschen Fläche* versehen, (komplex) eindimensionale Version einer *komplexen Mannigfaltigkeit*. Neben $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$, wo komplexe Differenzierbarkeit wie bisher definiert ist, brauchen wir eine weitere *Karte*, d.h. eine offene Menge, die zusammen mit \mathbb{C} die Riemannsche Zahlenkugel überdeckt, zusammen mit einer Bijektion (*Kartenabbildung*) auf eine Teilmenge von \mathbb{C} : Wir nehmen dazu $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ und als Kartenabbildung

$$w : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{für } z \neq \infty$$

und (natürlich) $w(\infty) := 0$. Eine auf einem Gebiet in $\hat{\mathbb{C}}$ definierte \mathbb{C} -wertige Funktion heißt nun *holomorph*, wenn sie in ihrem Definitionsgebiet nach z und/oder nach w komplex differenzierbar ist. Dieser Begriff ist wohldefiniert, weil im gemeinsamen Durchschnitt \mathbb{C}^* beider Karten die Bijektion $z \leftrightarrow w = \frac{1}{z}$ sogar biholomorph ist.

Beispiel. Wenn $c \neq 0$, ist in einer Umgebung von ∞ die Möbiustransformation

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + bw}{c + dw}$$

eine beschränkte Funktion und offensichtlich holomorph in w mit einer natürlichen holomorphen Fortsetzung in den Punkt ∞ ($\leftrightarrow w = 0$) durch den Wert $\frac{a}{c}$. Mit dieser holomorphen Fortsetzung und der oben eingeführten Konvention können wir also analog zu Satz 4.2 formulieren:

Satz 10.1 Möbiustransformationen sind biholomorphe Abbildungen der Riemannschen Zahlenkugel auf sich.

Beweis : Die Umkehrbarkeit der Möbiustransformationen ist im wesentlichen bereits in Abschnitt 4 bewiesen worden. Einzig der Spezialfall $c = 0$ verdient besondere Aufmerksamkeit: Hier ist $ad \neq 0$, und M induziert eine biholomorphe Abbildung von \mathbb{C} auf sich und muss $\infty \mapsto \infty$ abbilden, was man auch mit

$$\frac{1}{M(z)} = \frac{dw}{a + bw}$$

bestätigen kann. □

Noch mehr Beispiele: 1) $f(z) := (2 - z)/(z^2 + z + 1) = (2w^2 - w)/(1 + w + w^2) = w \cdot (2w - 1)/(1 + w + w^2)$ hat eine Nullstelle 1. Ordnung in ∞ .

2) Polynome vom Grad n , also $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ schreiben sich als

$$\frac{a_n}{w^n} + \frac{a_{n-1}}{w^{n-1}} + \dots + a_0 \quad ,$$

haben also in ∞ einen Pol der Ordnung n .

3) In der Analysis 1 betrachtet man eher zweierlei Limites, nämlich

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) .$$

Diese Limites können dort sehr wohl beide existieren, aber verschieden sein (Beispiel $f(x) = \arctan(x)$). Handelt es sich um die Restriktion einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, muss f im Punkt ∞ in diesem Fall eine wesentliche Singularität haben. Man ermittle die Laurententwicklung von $f(z) = e^z$ um den Punkt ∞ .

10.2 Die Automorphismen der Riemannschen Zahlenkugel

Die Gruppe der biholomorphen Abbildungen $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ der Riemannschen Zahlenkugel heißt die Automorphismengruppe $\text{Aut } \hat{\mathbb{C}}$ von $\hat{\mathbb{C}}$.

Satz 10.2 i) Die Gruppe \mathcal{M} der Möbiustransformationen ist isomorph zu $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

ii) Sie operiert genau dreifach transitiv auf $\hat{\mathbb{C}}$, d.h. für je zwei Tripel u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 paarweise verschiedener Punkte aus $\hat{\mathbb{C}}$ gibt es genau eine Möbiustransformation $z \mapsto M_A(z)$ mit $M(u_j) = v_j$ für $j = 1, 2, 3$.

iii) \mathcal{M} wird erzeugt von Transformationen der Typen

$$z \mapsto z + b, \quad b \in \mathbb{C}, \quad z \mapsto s \cdot z, \quad s \in \mathbb{C}^* \quad \text{und} \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

iv) $\text{Aut } \hat{\mathbb{C}} \cong \mathcal{M} \cong \text{PSL}_2(\mathbb{C})$

Beweis : (i) In Abschnitt 4 ist bereits erwähnt worden, dass für alle $A, B \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ die Eigenschaft $M_{A \cdot B} = M_A \circ M_B$ gilt; es gibt also einen Homomorphismus von $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ auf \mathcal{M} . Die identische Abbildung $z \mapsto z = \frac{az}{a}$ erhält man genau für die Vielfachen $a \cdot E$, $a \in \mathbb{C}^*$, der Einheitsmatrix; diese bilden einen Normalteiler in $\text{GL}_2(\mathbb{C})$, und die Faktorgruppe dazu ist nach Definition die *projektive lineare Gruppe* $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$. Nach dem Homomorphiesatz der Gruppentheorie ist sie also isomorph zu \mathcal{M} . Schließlich besitzt jedes Element aus $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ einen Repräsentanten $(\det A)^{-1/2}A$ aus $\text{SL}_2(\mathbb{C})$, daher gilt auch die Isomorphie $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

(ii) Es genügt zu zeigen, dass man jedes Tripel u_1, u_2, u_3 durch ein eindeutig bestimmtes M_A nach $0, 1, \infty$ überführen kann. Wir zeigen zunächst die Existenz, und zwar schrittweise: Wenn $u_3 \neq \infty$, wenden wir nacheinander die Translation $z \mapsto z - u_3$ und die Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ an. Nun dürfen wir also $u_3 = \infty$ annehmen. Wenn jetzt $u_1 \neq 0$ ist, wenden wir die Translation $z \mapsto z - u_1$ an (lässt ∞ fest); nun ist also außerdem $u_1 = 0$. Dann wird noch u_2 nach 1 übergeführt (unter Beibehaltung von 0 und ∞) durch

$$z \mapsto M_A(z) = \frac{z}{u_2} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} u_2^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & u_2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C}) \quad .$$

Eindeutigkeit: Es genügt zu zeigen, dass die drei Punkte $0, 1, \infty$ nur durch Vielfache der Einheitsmatrix simultan in sich übergeführt werden. Übungsaufgabe!

(iii) Ein erneuter Blick auf die Transformationen, die wir in Teil (ii) zur Konstruktion von M_A verwendet haben, zeigt, dass die angegebenen Transformationen zur Erzeugung von \mathcal{M} ausreichen.

(iv) Sei $m \in \text{Aut } \hat{\mathbb{C}}$. Durch Kombination mit einer Möbiustransformation dürfen wir annehmen, dass $m(\infty) = \infty$ und $m(0) = 0$ ist. ∞ kann keine wesentliche Singularität von m sein, sonst gäbe es nach dem Satz von Casorati–Weierstrass in $|z| > C$ beliebig kleine Werte, die bereits in einer Umgebung von 0 angenommen werden; dann wäre m also nicht bijektiv. ∞ muss daher ein Pol von m sein, und die Laurententwicklung von m im Punkt ∞ zeigt, dass $m(z)$ ein Polynom ist. Als Polynom vom Grad n nimmt m aber fast jeden Wert n mal an, folglich (Bijektivität!) muss $n = 1$ sein, $m(z) = s \cdot z$ ist also selbst eine Möbiustransformation. \square

Weil jedes Punktetripel eindeutig einen $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreis bestimmt, ergibt sich aus Teil (ii) dieses Satzes die

Folgerung 10.3 Die Gruppe \mathcal{M} der Möbiustransformationen operiert transitiv auf der Menge der $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise.

Beweis : Bleibt nur zu zeigen, dass Möbiustransformationen tatsächlich $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise in $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise überführen. Das ist klar, wenn es für die Erzeugenden von \mathcal{M} stimmt, und solche kennen wir jetzt nach Teil (iii) des Satzes: Offensichtlich gehen $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise in $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise über unter Translationen und Drehstreckungen, und für die Inversion $z \mapsto 1/z$ verifiziert man es durch eine leichte Rechnung (Übungsaufgabe 5). \square

Bemerkung für Liebhaber der Geometrie: Warum spielt hier eigentlich die *projektiv-lineare Gruppe* eine Rolle? Es gibt noch einen geometrischen Zugang zur Riemannschen Zahlenkugel, der bisher nicht erwähnt wurde: man kann \mathbb{C} als *affine Gerade* auffassen, natürlich über dem Körper \mathbb{C} . Aus der Geometrie weiß man, dass man affine Räume durch Hinzunahme von „unendlich fernen Punkten“ zu projektiven Räumen erweitern kann, und im Fall einer affinen Geraden genügt dazu genau ein Punkt ∞ . Diese *projektive Gerade* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist wieder nur die Riemannsche Zahlenkugel, und ihre projektiv-linearen Selbstabbildungen kann man genau als die Elemente von $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ identifizieren, die hier als gebrochen-lineare Transformationen operieren.

In der projektiven Geometrie ist bekannt, dass projektiv-lineare Transformationen auf Geraden eine wichtige Invariante besitzen, nämlich das *Doppelverhältnis* von vier Punkten

$$D(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)},$$

dessen Invarianz unter der Operation von \mathcal{M} wir hier direkt rechnerisch nachweisen wollen (die Definition kann per Limesbildung auch verwendet werden, wenn eines der $z_j = \infty$ ist).

Satz 10.4 Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ und $m \in \mathcal{M}$. Dann ist

$$D(m(z_1), m(z_2); m(z_3), m(z_4)) = D(z_1, z_2; z_3, z_4) \quad .$$

Beweis : Wieder genügt es, die Behauptung für die erzeugenden Elemente von \mathcal{M} aus Teil (iii) des letzten Satzes nachzuweisen. Für Translationen und Drehstreckungen ist die Gleichung unmittelbar klar, für die Inversion erweitere man

$$\frac{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_4}\right)}{\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}\right)}$$

mit dem Hauptnenner $z_1 z_2 z_3 z_4$. □

Wozu ist das Doppelverhältnis gut? Man erkennt an ihm, ob die vier Punkte auf einem $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreis liegen oder nicht:

Satz 10.5 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ liegen auf einem $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreis genau dann, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist.

Beweis : Da die Menge der $\hat{\mathbb{C}}$ -Kreise invariant unter \mathcal{M} ist ebenso wie das Doppelverhältnis, dürfen wir wie im Beweisteil (ii) von Satz 10.2 die Behauptung auf den Spezialfall

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 1, \infty, z), \quad D(0, 1; \infty, z) = \frac{1-z}{-z} = 1 - \frac{1}{z}$$

reduzieren. Klar, dass dieses Doppelverhältnis genau dann reell ist, wenn $z \in \mathbb{R}$. Da $0, 1, \infty$ auf der reellen Geraden liegen, folgt daraus die Behauptung. □

10.3 Der rationale Funktionenkörper

Wir haben gelernt, wie rationale Funktionen $p(z)/q(z)$ ($p, q \in \mathbb{C}[z]$ Polynome, q nicht das Nullpolynom) in den Punkt ∞ fortgesetzt werden können – entweder holomorph oder durch einen Pol; es handelt sich dabei also um Funktionen, die meromorph auf ganz $\hat{\mathbb{C}}$ sind. Man überlegt sich leicht, dass die Gesamtheit $\mathbb{C}(\hat{\mathbb{C}})$ aller auf ganz $\hat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen einen Körper bildet, der also den Körper $\mathbb{C}(z)$ aller rationalen Funktionen umfasst. Es gilt aber sogar die Gleichheit:

Satz 10.6 $\mathbb{C}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$

Beweis : Jede meromorphe Funktion auf $\hat{\mathbb{C}}$ hat nur endlich viele Pole in \mathbb{C} , andernfalls würden sie sich in \mathbb{C} häufen oder eine gegen ∞ konvergente Folge bilden, man hätte also einen Häufungspunkt von Nullstellen von $1/f$, Widerspruch. Wir können

daher annehmen, dass z_1, \dots, z_k genau die Pole von f in \mathbb{C} sind, und zwar jeweils von Ordnung n_1, \dots, n_k . Dann hat also

$$p(z) := f(z) \cdot \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{n_j}$$

höchstens noch einen Pol im Punkt ∞ . Die Laurententwicklung um diesen Punkt zeigt, dass p ein Polynom sein muss, f also eine rationale Funktion. \square

11 Etwas Funktionentheorie in mehreren Variablen

Wir betrachten nun Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, wobei D ein Gebiet in \mathbb{C}^n ist. Wieder können wir \mathbb{C} als \mathbb{R}^2 auffassen und haben den Begriff reeller Differenzierbarkeit von $\operatorname{Im} f$ und $\operatorname{Re} f$ zur Verfügung. Wir nennen f reell differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ dies sind. In \mathbb{C}^n verwenden wir Koordinaten (z_1, \dots, z_n) und schreiben jeweils $z_j = x_j + i \cdot y_j$. Insbesondere können wir für reell differenzierbares f von den partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j} = (\operatorname{Re} f)_{x_j} + i(\operatorname{Im} f)_{x_j}$ und $\frac{\partial f}{\partial y_j} = f_{y_j} = (\operatorname{Re} f)_{y_j} + i(\operatorname{Im} f)_{y_j}$ und den Linearkombinationen $\frac{\partial f}{\partial z_j} = f_{z_j}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = f_{\bar{z}_j}$ sprechen. Für festgehaltenes z_1, \dots, z_n ist f als Funktion von z_1 holomorph genau dann, wenn $f_{\bar{z}_1} = 0$ ist. Wir nennen f holomorph, falls es diese Eigenschaft bezüglich jeder Koordinate besitzt.

Definition 11.1 Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ für $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ist holomorph, falls sie reell differenzierbar ist und für $j = 1, \dots, n$ die partiellen Ableitungen $f_{\bar{z}_j}$ verschwinden.

Man überlegt leicht mit Hilfe der Rechenregeln für partielle Ableitungen, dass alle naheliegenden Rechenregeln auch im Komplexen noch gelten. Beispielsweise die Kettenregel.

Proposition 11.2 Ist $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und sind $h_1, \dots, h_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist auf ihrem Definitionsbereich in \mathbb{C}^n die Funktion $g = f(h_1(z_1), \dots, h_n(z_n))$ holomorph und es gilt

$$g_{z_j}(z_1, \dots, z_n) = \frac{\partial f}{\partial z_j}(h_1(z_1), \dots, h_n(z_n)) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial z_j}(z_j).$$

Ebenso ist die Funktion $v = f(h_1(z), \dots, h_n(z))$ auf ihrem Definitionsbereich in \mathbb{C} holomorph und es gilt

$$v'(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(h_1(z), \dots, h_n(z)) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial z}(z).$$

Der Beweis verbleibt als Übung. Der entsprechende Beweis aus der mehrdimensionalen reellen Analysis dient als Modell.

Es verbleibt die Frage, ob diese Definition sinnvoll ist oder ob man wie beim Übergang von reeller zu komplexer Differenzierbarkeit nicht besser eine stärkere Beziehung zwischen den partiellen Ableitungen f_{z_j} hätte fordern müssen. Wir argumentieren nun, warum dies nicht nötig ist. Sei $z_0 = (z_{0_1}, \dots, z_{0_n}) \in \mathbb{C}^n$. Dann betrachten wir Potenzreihen in n Variablen

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_n=0}^{\infty} a_{j_1, \dots, j_n} (z - z_{0_1})^{j_1} \cdot \dots \cdot (z - z_{0_n})^{j_n}.$$

Gibt es ein Tupel von Radii $\underline{R} = (R_1, \dots, R_n)$, sodass die Abschätzung

$$|a_{j_1, \dots, j_n}| \leq \frac{M}{R_1^{j_1} \cdot \dots \cdot R_n^{j_n}} \quad (1)$$

für eine Konstante $M \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$ gilt, so konvergiert die Potenzreihe auf dem Rechteck (eigentlich ein direktes Produkt von Kreisscheiben)

$$B_{z_0}(\underline{R}) = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1 - z_{0_1}| < R_1, \dots, |z_n - z_{0_n}| < R_n \right\}.$$

Zum Bestimmen der partiellen Ableitungen, sagen wir nach z_i , können wir die anderen Variablen $z_j, j \neq i$ als Konstanten ansehen und die Sätze aus Abschnitt 5.2 auf die Variable z_j anwenden. Wir erhalten daher:

Proposition 11.3 *Erfüllt die Potenzreihe f die Abschätzung (1), so hat f partielle Ableitungen beliebiger Ordnung und es gilt*

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \dots \partial z_n^{k_n}} = k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n! a_{k_1 k_2 \dots k_n}.$$

Satz 11.4 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ Gebiet; ist $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in $z_0 \in D$, so ist f in einer Umgebung von z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar. Folglich besitzt f partielle Ableitungen beliebiger Ordnung.*

Beweis : Zur notationellen Vereinfachung beweisen wir nur den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall folgt analog durch eine n -fache statt zweifache Anwendung der Cauchy-Integralformel. Wir wählen R_1 und R_2 so klein, dass das der Abschluss des

Rechtecks $B_{z_0}(\underline{R})$ ganz in D liegt, wobei $z_0 = (z_{0_1}, z_{0_2})$ und $\underline{R} = (R_1, R_2)$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2 - z_{0_2}| = r_2} \frac{f(z_1, \zeta_2) d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{|\zeta_2 - z_{0_2}| = r_2} \int_{|\zeta_1 - z_{0_1}| = r_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2. \end{aligned}$$

Analog zum Fall in einer Variablen verwendet man nun die Potenzreihenentwicklung.

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_{0_1})^{k_1} (z_2 - z_{0_2})^{k_2}}{(\zeta_1 - z_{0_1})^{k_1+1} (\zeta_2 - z_{0_2})^{k_2+1}}.$$

Wie dort prüft man die dominierte Konvergenz der Folge der Partialsummen, um Limes und Integral vertauschen zu können. Damit erklärt man

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_1, k_2} (z_1 - z_{0_1})^{k_1} (z_2 - z_{0_2})^{k_2},$$

wobei

$$a_{k_1 k_2} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{|\zeta_2 - z_{0_2}| = r_2} \int_{|\zeta_1 - z_{0_1}| = r_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_{0_1})^{k_1+1} (\zeta_2 - z_{0_2})^{k_2+1}} d\zeta_1 d\zeta_2,$$

und damit die gewünschte Potenzreihenentwicklung auf $B_{z_0}(\underline{R})$. □

Zum Schluss noch eine nützliche Beobachtung: Aus der Konvergenz einer Potenzreihe in mehreren Variablen folgt umgekehrt eine Abschätzung vom Typ (1): Der Einfachheit halber formulieren wir diesen Sachverhalt in einer zweidimensionalen Version:

Proposition 11.5 Seien $R > 0$ und $0 < r < R$. Wenn die Potenzreihe

$$f(z, w) = \sum_{i, j=0}^{\infty} c_{i, j} z^i w^j$$

im Rechteck $|z| < R$, $|w| < R$ konvergiert, gibt es eine (von r und f abhängige) Konstante M mit

$$|c_{i, j}| \leq \frac{M}{r^{i+j}} \quad \text{für alle } i, j \geq 0.$$

Beweis : Man könnte hier mit einer Verallgemeinerung der Cauchy-Ungleichungen auf Funktionen in zwei Variablen arbeiten, s. Satz 8.8; elementarer geht es mit folgendem Argument: Die Reihe konvergiert für $z = w = r$, also sind alle $|c_{i, j} r^{i+j}|$ durch ein $M > 0$ beschränkt, somit folgt die Behauptung. □

12 Differentialgleichungen

Eine *Differentialgleichung* n -ter Ordnung in einer reellen oder komplexen Veränderlichen x ist eine Funktion $F(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ in $n + 2$ Variablen. Eine *Lösung* der Differentialgleichung ist eine n -fach reell (bzw. komplex) differenzierbare Funktion $\phi(x)$, so dass

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

gilt. Wir schreiben oft $y = \phi(x)$ und nennen den Ausdruck $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ „die“ Differentialgleichung.

Viele Beispiele von Differentialgleichungen entstammen der Physik: Wir untersuchen den freien Fall aus großer Höhe. Der Parameter ist $y = y(t)$, Abstand zum Erdmittelpunkt, welcher vom Zeitpunkt t abhängig ist. Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands, genauer gilt

$$y''(t) = -\gamma M \cdot \frac{1}{y(t)^2},$$

wobei M die Erdmasse und γ die Gravitationskonstante ist. In diesem Fall ist

$$F(t, y, y', y'') = \gamma M \cdot \frac{1}{y(t)^2} + y''(t)$$

unabhängig von t (und von $y'(t)$). Bei Differentialgleichungen ist es stets ein legitimes Mittel eine Funktion $y(t)$, in der Regel abhängig von einem Parameter, zu raten. Kann man die Differentialgleichung nicht lösen, versucht man eben eine neue, allgemeinere Klasse von Funktionen. Hier probieren wir

$$y(t) = a \cdot t^b.$$

Die Differentialgleichung besagt dann

$$a \cdot b(b - 1)t^{b-2} = -\gamma M a^{-2} t^{-2b},$$

woraus $b = \frac{2}{3}$ und $a = (9\gamma M/2)^{1/3}$ resultiert.

Damit haben wir Lösungen gefunden. In der Regel hat man weitere Vorgaben zu einem gewissen Zeitpunkt (sagen wir $t = 0$) bezüglich des Orts $y(t)$ und der Geschwindigkeit.

Hat man eine Differentialgleichung n -ter Ordnung F gegeben, so nennt man die Suche einer Lösung $y(x)$ mit

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

für ein vorgegebenes x_0 ein *Anfangswertproblem*.

Wir werden zunächst einige praktische Verfahren untersuchen, um Lösungen von Differentialgleichungen zu erraten. Oftmals findet man so keine Lösung und dann stellt sich die Frage, ob man wenigstens abstrakt die Existenz einer Lösung garantieren kann. In beiden Fällen ist es wichtig zu wissen, ob die Lösung eindeutig ist. Schließlich werden wir bei speziellen Typen von Gleichungen, insbesondere linearen, die Struktur der Lösungsmenge genauer untersuchen.

Wir betrachten nochmal die Gleichung des freien Falls, also $y(t) = a \cdot t^{2/3}$ mit obigem a . Dann ist die Geschwindigkeit $y'(t) = \frac{2}{3}at^{-1/3}$, also stets positiv. Dies ist nicht wirklich die Gleichung eines Falls, sondern eines Objekts, das sich von der Erde entfernt, gebremst von der Gravitation. Um zu sehen, wann dies eintritt, also welche Geschwindigkeit das Objekt an der Erdoberfläche $y_0 = 6.370 \cdot 10^6$ haben muss, löst man nach y' als Funktion von t auf und erhält

$$y'(t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{a^3}{y_0}}$$

und nach Einsetzen von M und γ

$$y'(t) \sim 11,2 \text{ km/s,}$$

die Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche.

12.1 Explizite Differentialgleichungen

Ist die n -te Ableitung gegeben als Funktion der anderen Variablen, also

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}),$$

so nennt man die Differentialgleichung *explizit*. Wir schränken uns in diesem Abschnitt auf Ordnung $n = 1$ ein und betrachten Beispielklassen.

12.1.1 Die Variable y kommt in f nicht vor

Die Differentialrechnung $y' = f(x)$ beschreibt nichts anderes als die Suche nach einer Stammfunktion von f . Stammfunktionen sind eindeutig bis auf eine additive Konstante. Folglich ist das ein Anfangswertproblem.

$$y' = f(x), y(x_0) = y_0$$

eindeutig durch

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

lösbar.

12.1.2 Die Variable x kommt in f nicht vor

Nehmen wir an, lokal in einer Umgebung von x_0 sei $y(x)$ umkehrbar und $x(y)$ die Umkehrfunktion. Dann folgt aus $y'(x) = f(y)$

$$1 = \frac{dx(y(x))}{dx} = \frac{dx(y)}{dy} \cdot \frac{dy(x)}{dx} = x' f(y), \text{ also } x' = f(y)^{-1}$$

und wir haben das Problem auf das vorige zurückgeführt. In der Praxis rechnet man einfach wie im folgenden Beispiel mit den Symbolen dx und kümmert sich nicht um Invertierbarkeit. Erst nach Auffinden der formalen Lösung muss man natürlich Definitionsbereiche deklarieren.

Beispiel 12.1 Wir betrachten $y' = -3y$. Offenbar ist $y(x) = 0$ eine triviale Lösung dieser Differentialgleichung. Wir ignorieren diese Lösung hier und in einigen folgenden Beispielen und suchen nach weiteren Lösungen. Wir erhalten aus der Differentialgleichung eine Gleichheit von Differentialformen (wir werden diesen Begriff in dieser Vorlesung nicht erklären) $dy/y = -3dx$, welche wir integrieren und $\ln|y| = -3x + c$ oder

$$|y| = e^{c-3x}$$

erhalten. Diese Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differentierbar und genügt der Differentialgleichung. Die gesamte Lösungsmenge besteht also aus zwei getrennten Funktionsscharen für y positiv und y negativ, dazu natürlich die oben erwähnte triviale Lösung $y \equiv 0$.

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig und enthält nicht Null, z.B. $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$, so hat $1/y$ auf D eine Stammfunktion, den komplexen Logarithmus. Auch ohne diesen zu kennen, ist

$$y(x) = e^{c-3x}$$

holomorph und genügt der Differentialgleichung.

12.1.3 Getrennte Veränderliche $y' = f(x) \cdot g(y)$

Dieser Fall verallgemeinert den vorigen. In der Praxis trennt man Variablen und Differentiale und integriert.

Beispiel 12.2 $y' = x^2 \cdot y$ formen wir zu $\frac{dy}{y} = x^2 \cdot dx$ um, integrieren zu $\ln |y| = \frac{1}{3}x^3 + c$ und exponentieren um $y = \pm e^{c + \frac{1}{3}x^3}$ zu erhalten.

Hier können wir Existenz und Eindeutigkeit formal beweisen.

Satz 12.3 Seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I, y_0 \in J$ und $g(y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, sodass es auf U genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

gibt. Sie ist gegeben durch Auflösen der Gleichung

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Beweis : Sei $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}$ und $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$. Diese Integrale existieren in einer Umgebung von x_0 bzw. y_0 , da $g(y_0) \neq 0$. Auf dieser Umgebung existiert, da G stetig differenzierbar ist, eine lokale Umkehrfunktion H , welche stetig differenzierbar ist. D.h. $y = H(G(y))$ in einer Umgebung von y_0 . Sei also

$$y(x) := H(F(x)).$$

Diese Funktion ist differenzierbar, da F und H dies sind und aus $G(y(x)) = F(x)$ folgt durch Ableiten

$$\frac{y'(x)}{g(y)} = G'(y(x)) \cdot y'(x) = F'(x) = f(x),$$

also ist die Differentialgleichung erfüllt. Wir prüfen noch die Anfangswertbedingung. Aus $F(x_0) = 0$ und $G(y_0) = 0$, also $H(0) = y_0$ folgt $y(x_0) = H(F(x_0)) = y_0$.

Ist neben $y(x)$ auch $z(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems, so ist in einer Umgebung von z_0 , in der g nicht Null wird,

$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = f(x).$$

Dann ist

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{z'(t)}{g(z(t))} dt = \int_{y_0}^{z(x)} \frac{ds}{g(s)},$$

wobei bei der letzten Umformung die Substitution $s = z(t)$ durchgeführt wurde. Diese Gleichung besagt $F(x) = G(z(x))$, also $z(x) = H(F(x)) = y(x)$, was noch zu zeigen war. \square

12.1.4 Substitutionsmethoden

Als erstes Beispiel betrachten wir für $a, b, c \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$)

$$y' = f(ax + by + c), \quad (b \neq 0).$$

Wir substituieren $u(x) = ax + by(x) + c$ und erhalten für u die Differentialgleichung

$$u' = a + by'(x) = a + b \cdot f(u).$$

Dabei tritt die Variable x auf der rechten Seite nicht mehr auf und wir können die Gleichung mit obigen Methoden nach $u(x)$ lösen. Dann ist $y(x) = \frac{1}{b}(u(x) - ax - c)$.

Als zweites Beispiel betrachten wir eine homogene Differentialgleichung

$$y' = f(y/x).$$

Hier substituieren wir $u(x) = y(x)/x$ und erhalten $y' = u(x) + x \cdot u'(x) = f(u)$, also

$$u' = \frac{f(u) - u}{x},$$

was eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen ist.

Im dritten Beispiel

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

entwickeln wir diese Substitutionstechnik noch weiter. Ist $c = \gamma = 0$, so ist das Argument von f gleich

$$\frac{ax + by}{\alpha x + \beta y} = \frac{a + b(y/x)}{\alpha + \beta(y/x)}.$$

Mit $g(t) = \frac{a+bt}{\alpha+\beta t}$ liegt also eine Differentialgleichung

$$y' = (f \circ g)\left(\frac{y}{x}\right)$$

vor, die wir wie oben beschrieben lösen können. Ist (x_0, y_0) eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by &= -c \\ \alpha x + \beta y &= -\gamma \end{aligned}$$

so führt die Substitution $\tilde{y} = y - y_0$ und $\tilde{x} = x - x_0$ zu einer Differentialgleichung gleicher Bauart mit $c = \gamma = 0$. Aus einer Lösung $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$ hiervon gewinnt man die gesuchte Lösung durch Rücksubstitution

$$y(x) = \tilde{y}(\tilde{x} + x_0) + y_0.$$

Das Gleichungssystem ist lösbar, falls $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$ ist. In den anderen Fällen ist die Differentialgleichung bereits homogen, wie man mit Fallunterscheidung leicht nachprüft.

12.1.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen der Form

$$y' + g(x) \cdot y = h(x)$$

werden *linear* (erster Ordnung) genannt. Ist $h(x)$ die Nullfunktion, so wird die Differentialgleichung *homogen* genannt. In diesem Fall sind die Variablen getrennt, die Lösungen lassen sich also nach dem Verfahren aus 12.1.3 bestimmen. Diese sind durch

$$y(x) = y_0 e^{-G(x)}, \quad \text{mit} \quad G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

gegeben, wobei y_0 beliebig ist. Die angegebene Lösung genügt auch der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$. Wir zeigen, dass es die einzige ist. Sei $\varphi(x)$ eine Lösung und $u(x) = e^{G(x)} \cdot \varphi(x)$. Dann ist

$$u'(x) = e^{G(x)} \cdot (\varphi'(x) + \varphi(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Also ist $u(x)$ konstant und $\varphi(x)$ von der Gestalt oben. Die inhomogene lineare Differentialgleichung löst man durch den Ansatz

$$y(x) = C(x) e^{-G(x)},$$

genannt *Variation der Konstanten*. Dies ist eine Lösung, falls

$$0 = y' + gy - h = (C' - gC + gC) \cdot e^{-G} - h = C'e^{-G} - h,$$

also falls

$$C(x) = \int_{x_0}^x h(t)e^{G(t)} dt + C_0.$$

Damit haben wir bereits alle Lösungen gefunden. Denn sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung, so ist

$$(y_1 - y_2)' + g(y_1 - y_2) = 0,$$

also $y_1 - y_2$ eine Lösung der homogenen und damit

$$y_1 - y_2 = y_0 \cdot e^{-G}$$

nach dem oben bewiesenen. Dies entspricht gerade dem Abändern der Konstanten C_0 .

13 Existenz- und Eindeutigkeitsätze

13.1 Der Lipschitz-stetige Fall

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad \text{für } x \in [x_1, x_2] \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Die wesentliche Voraussetzung, die wir hier treffen, ist die *Lipschitzstetigkeit* von f auf dem Streifen

$$S = \left\{ (x, y) : x \in [x_1, x_2], -\infty < y < +\infty \right\}$$

in y -Richtung, d.h. es gibt ein $L \geq 0$ mit

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$$

für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in S$. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

Satz 13.1 (Picard–Lindelöf) *Das Anfangswertproblem (2) mit f Lipschitzstetig auf S ist eindeutig lösbar.*

Zum Beweis benötigen wir einen Fixpunktsatz, der in der Numerik und Funktionalanalysis bewiesen wird. Wir wiederholen nur die notwendigen Begriffe.

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, in den Anwendungen typischerweise unendlichdimensional. Dieser Vektorraum heißt *vollständig* oder *Banachraum*, falls jede Cauchyfolge einen Grenzwert in V besitzt. Beispiel: Ist V der Vektorraum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}(K)$ auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \left\{ |f(x)| \right\},$$

so ist dies offenbar eine Norm. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen in V ist eine Cauchyfolge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein N_0 existiert mit

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

für alle $n, m > N_0$. Mit anderen Worten: Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent gegen den punktweisen Limes $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Also ist f wieder stetig und daher $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Fügt man eine stetige Gewichtsfunktion $G: K \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ein, betrachtet man die Norm

$$\|f\|_{\infty, G} := \sup_{x \in K} \left\{ |f(x)| \cdot G(x) \right\}$$

so bleibt der Satz über den stetigen Limes einer Cauchyfolge stetiger Funktionen gültig, da G auf der kompakten Menge K ein Minimum größer Null hat.

Als Gegenbeispiel behalte man $K = [0, 1]$, V die stetigen Funktionen auf K und ändere die Norm ab zu

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Dann ist

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1/2] \\ 2n \cdot (x - 1/2) & \text{für } x \in [1/2, 1/2 + 1/2n] \\ 1 & \text{für } x \in [1/2 + 1/2n, 1] \end{cases}$$

eine Cauchyfolge, aber der einzige Kandidat für einen Limes (bis auf Nullmengen) die charakteristische Funktion auf dem halboffenen Intervall $]1/2, 1]$, welche auf K nicht stetig ist.

Satz 13.2 (Banach'scher Fixpunktsatz) Sei $D \subseteq (V, \|\cdot\|)$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums und $T: D \rightarrow D$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. $\exists 0 < q < 1$ mit

$$\|Tx - Ty\| \leq q \cdot \|x - y\|.$$

Dann gibt es in D genau einen Fixpunkt x_∞ von T (d.h. $T(x_\infty) = x_\infty$) und für beliebiges $x \in D$ konvergiert die Folge $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x_∞ .

Beweis des Satzes 13.1 : Wir schreiben das Anfangswertproblem so um, dass die Lösung Fixpunkt einer Selbstabbildung eines Banachraums ist. Da f stetig ist, muss $u(x) = f(x, y(x))$ ebenfalls stetig sein. Also ist jede Lösung des Anfangswertproblems sogar stetig differenzierbar. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass jede Lösung der Gleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

genügt. Umgekehrt genügt jede (a priori nur) stetige Lösung $y(x)$ dieser Integralgleichung der Anfangswertvorgabe $y(x_0) = y_0$ und da die rechte Seite differenzierbar ist, muss $y(x)$ automatisch auch differenzierbar sein. Wir betrachten also die Abbildung

$$T: y(x) \mapsto (Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

auf den Banachraum V der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ mit der gewichteten Norm $\|\cdot\|_{\infty, G}$ und $G(x) = e^{-2Lx}$, wobei L eine Lipschitzkonstante von f ist. Dann ist für $y, z \in \mathcal{C}([x_1, x_2])$

$$\begin{aligned} |T(y) - T(z)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) - f(t, z(t)) dt \right| \\ &\leq L \cdot \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)| \cdot e^{-2Lt} e^{2Lt} dt \\ &\leq L \cdot \|y - z\|_{\infty, G} \cdot \int_{x_0}^x e^{2Lt} dt \\ &\leq L \cdot \|y - z\|_{\infty, G} \frac{e^{2Lx} - e^{2Lx_0}}{2L} \quad \text{für alle } x \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} \|T(y) - T(z)\|_{\infty, G} &= \sup_{x \in K} |T(y) - T(z)| \cdot G(x) \\ &\leq L \cdot \|y - z\|_{\infty, G} \cdot \sup_{x \in K} \frac{e^{2Lx} - e^{2Lx_0}}{2L} \cdot e^{-2Lx} = \frac{1}{2} \|y - z\|_{\infty, G} \end{aligned}$$

und damit T eine kontrahierende Abbildung des Banachraums in sich. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts von T und damit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems. \square

Man beachte, dass dieser Beweis konstruktiv ist, also ein praktisches Verfahren zur Bestimmung der Lösung beinhaltet. Man starte mit einer beliebigen stetigen Funktion und iteriere die Anwendung des Integraloperators bis man eine Lösung in gewünschter Näherung bestimmt hat.

13.2 Existenz und Eindeutigkeit im Komplexen

Ist die rechte Seite einer expliziten Differentialgleichung

$$w' = f(z, w), \quad w(z_0) = w_0$$

holomorph, so hat das Anfangswertproblem auf mindestens einem geeigneten Ball im Definitionsbereich eine Lösung.

Satz 13.3 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf einem Gebiet, das ein Rechteck

$$R = \left\{ (z, w) : |z - z_0| \leq a, |w - w_0| \leq b \right\}$$

enthält.

Ist $|f| \leq M$ auf diesem Rechteck, so besitzt das Anfangswertproblem

$$w' = f(z, w(z)), \quad w(z_0) = w_0$$

zumindest auf dem Kreis

$$K = \left\{ |z - z_0| < \alpha = \min\{a, b/M\} \right\}$$

eine Lösung. Zwei Lösungen w_1 und w_2 , die beide auf einem Gebiet G mit $z_0 \in G$ definiert sind, stimmen überein.

Beweis : Für z mit $|z - z_0| < a$ folgt aus der Standardabschätzung für Wegintegrale

$$|f(z, w_1) - f(z, w_2)| \leq \sup_{(z,w) \in R} |f_w(z, w)| \cdot |w_1 - w_2|$$

und da $f_w(z, w)$ wieder holomorph ist, nimmt diese Funktion auf dem Rechteck das Supremum $L < \infty$ an. Dies ist die gewünschte Lipschitz-Abschätzung und der Rest des Beweises verläuft nun wie im reellen Fall.

Das Anfangswertproblem ist äquivalent zu der Integralgleichung

$$w(z) = w_0 + \int_{z_0}^z f(\zeta, w(\zeta)) d\zeta,$$

wobei die rechte Seite aufgrund der Holomorphie des Integranden wegunabhängig ist. Wir suchen eine Lösung in dem Vektorraum V der holomorphen Funktionen auf dem Kreis K , die zudem auf K beschränkt sind. Mit der Norm

$$\|u\| = \sup_K |u(z)| e^{-2L|z-z_0|}$$

ist dieser Raum vollständig, denn der punktweise Limes einer gleichmässig konvergenten Folge holomorpher Funktionen ist wieder holomorph und der punktweise Limes einer Cauchyfolge beschränkter Funktionen bezüglich der angegebenen Norm ist wieder beschränkt. In diesem Raum betrachten wir den Unterraum V_b aller Funktionen u mit $|u(z) - w_0| \leq b$ für alle $z \in K$. Dies ist ein abgeschlossener Unterraum von V und somit wieder ein Banachraum. Wir wollen zeigen, dass

$$(Tu)(z) = w_0 + \int_{z_0}^z f(\zeta, u(\zeta)) d\zeta$$

den Raum V_b in sich abbildet und eine Kontraktion ist. Holomorphie von Tu ist offensichtlich und für alle $z \in K$ gilt

$$|Tu(z) - w_0| \leq \int_{z_0}^z |f(\zeta, u(\zeta))| d\zeta \leq M \cdot |z - z_0| \leq \alpha \cdot M \leq b.$$

Wir schätzen das Integral mit Hilfe des Wegs $\gamma(t) = z_0 + t \cdot e^{i\phi}$, $t \in [0, |z - z_0|]$ entlang der Verbindungsstrecke von z nach z_0 ab, wobei wir $z - z_0 = e^{i\phi} \cdot |z - z_0|$ gesetzt

haben. Damit gilt

$$\begin{aligned}
|T(u(z)) - T(v(z))| &= \left| \int_{z_0}^z f(\zeta, u(\zeta)) - f(\zeta, v(\zeta)) d\zeta \right| \\
&\leq L \cdot \int_0^{|z-z_0|} |u(\gamma(t)) - v(\gamma(t))| \cdot e^{-2Lt} \cdot e^{2Lt} dt \\
&\leq L \cdot \|u - v\| \int_0^{|z-z_0|} e^{2Lt} dt \\
&\leq \frac{1}{2} e^{2L|z-z_0|} \|u - v\|,
\end{aligned}$$

also insgesamt $\|Tu - Tv\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|$. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Existenz und auch die Eindeutigkeit, wenn beide Lösungen auf K definiert sind.

Für die etwas allgemeinere Formulierung der Eindeutigkeitsaussage im Satz argumentiert man wie folgt: Angenommen w_1 und w_2 sind zwei Lösungen, die auf G übereinstimmen und sich in einem Punkt $z_1 \in G$ unterscheiden. Sei $\gamma(z)$ ein Weg von z_0 nach z_1 , mit $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$. Dann gibt es ein größtes $t_0 < 1$ $w_1(\gamma(t)) = w_2(\gamma(t))$ für alle $t \leq t_0$. Wir betrachten das neue Anfangswertproblem mit der gleichen Differentialgleichung, aber dem Anfangswert $w(\gamma(t_0)) = w_1(\gamma(t_0))$. Ein kleines Rechteck um $(\gamma(t_0), w_1(\gamma(t_0)))$ liegt in G und wir können den ersten Teil des Arguments auf das Rechteck anwenden. Also erhalten wir die Eindeutigkeit der Lösung in einem Kreis um $\gamma(t_0)$, im Widerspruch zur Maximalität in der Wahl von t_0 . Also stimmen w_1 und w_2 auf ganz G überein. \square

Wir verwenden nun, dass sich jede holomorphe Funktion, also auch die Lösung des obigen Anfangswertproblems in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Wir können also $w(z)$ als $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ auf dem Kreis $|z - z_0| < \alpha$ schreiben. Die rechte Seite der Differentialgleichung können wir ebenfalls als Potenzreihe

$$f(z, w) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}(z - z_0)^i (w - w_0)^j$$

schreiben. Durch Koeffizientenvergleich erhält man aus der Identität

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i (z - z_0)^{i-1} = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} (z - z_0)^i \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right)^j$$

Rekursionsformeln für die a_i : Kennt man die Koeffizienten a_i für $i = 0, \dots, k$, so erhält man durch Auswerten der rechten Seite für alle (i, j, n) für $i + nj \leq k$ die

Potenzreihe bis zur Potenz $(z - z_0)^k$, während der Koeffizient von $(z - z_0)^k$ auf der linken Seite gerade $(k + 1)a_{k+1}$ ist, also bis auf eine Konstante der gesuchte nächste Koeffizient. An Hand dieser Rekursionsformeln lässt sich die Holomorphie der Lösungsfunktion auch direkt einsehen:

Satz 13.4 Sei $R > 0$. Wenn die Potenzreihe

$$f(z, w) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}(z - z_0)^i(w - w_0)^j$$

im Rechteck $|z - z_0| < R, |w - w_0| < R$ konvergiert, ist auch die Lösungsfunktion $w = w(z)$ von $w' = f(z, w), w(z_0) = w_0$ durch eine Potenzreihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(z - z_0)^i$ mit positivem Konvergenzradius gegeben.

Beweis : Um die Schreibweise zu vereinfachen, setzen wir (durch Translation) $z_0 = 0 = w_0$. Der Koeffizientenvergleich zur Bestimmung der a_i beginnt mit

$$a_0 = 0, \quad a_1 = c_{0,0}, \quad 2a_2 = c_{1,0} + c_{0,1}a_1 = c_{1,0} + c_{1,0}c_{0,0}$$

und man übersieht sofort, dass alle a_n Polynome $Q_n(c_{i,j})$ in jeweils endlich vielen der Koeffizienten $c_{i,j}$ sind; die Polynome Q_n haben dabei selbst nicht-negative rationale Koeffizienten. Aus Proposition 11.5 wissen wir, dass es für jedes r mit $0 < r < R$ eine Konstante M gibt mit der Eigenschaft

$$|c_{i,j}| \leq \frac{M}{r^{i+j}}$$

Wir können also anstelle von f als *worst case* die Funktion

$$F(z, u) := M \cdot \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{z^i u^j}{r^i r^j} = M \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{r}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u}{r}}$$

betrachten. Die Lösungsfunktion $u(z), u(0) = 0$, der Differentialgleichung $u' = F(z, u)$ hat dann – wenn sie konvergiert – eine Potenzreihenentwicklung

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = Q_n\left(\frac{M}{r^{i+j}}\right) \geq |Q_n(c_{i,j})| = |a_n| \quad \text{für alle } n,$$

es genügt also, die Holomorphie von u in einem Kreis $|z| < s$ zu zeigen. Dazu erinnere man sich an das Stichwort *Variablentrennung* und schreibe die Dgl. um in

$$\left(1 - \frac{u}{r}\right) du = \frac{M dz}{1 - \frac{z}{r}}.$$

Beide Seiten sind holomorph im konvexen Gebiet $|u| < r$ bzw. $|z| < r$, haben also eine Stammfunktion. Die Lösung erfüllt darum

$$u - \frac{u^2}{2r} = -Mr \ln\left(1 - \frac{z}{r}\right),$$

wobei \ln einen „Zweig“ der Umkehrfunktion von \exp bezeichnet, der $\ln(1) = 0$ erfüllt, vgl. hierzu Beispiel 5.2 iii); die Gleichung ist nun noch nach u aufzulösen. Man überzeuge sich davon, dass mit Hilfe eines geeigneten Zweigs der Wurzelfunktion u in einer Umgebung von $z_0 = 0$ in der Tat holomorph wird und die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ erfüllt. (Auch die Wurzelfunktion kann man in sternförmigen Teilgebieten von \mathbb{C}^* als $\sqrt{v} := \exp(\frac{1}{2} \ln(v))$ mit Hilfe des Logarithmus als holomorphe Funktion definieren.) \square

Wir betrachten das Beispiel

$$w' = z^2 + w^2, \quad w(0) = 1.$$

Der obige Koeffizientenvergleich mit dem Ansatz $w(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ ergibt

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1} = z^2 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\right)^2 = z^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_j a_{i-j}\right) z^i$$

und damit

$$(i+1)a_{i+1} = \sum_{j=0}^i a_j a_{i-j} + \delta_{i,2}.$$

Also ist $a_0 = 1, a_1 = a_0^2 = 1; 2a_2 = 2a_0 a_1$ ergibt $a_2 = 1$; $3a_3 = 2a_0 a_2 + a_1^2 + 1$ ergibt $a_3 = 4/3$ und $4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2$ ergibt $a_4 = 7/6$. Also ist

$$w(z) = 1 + z + z^2 + \frac{4}{3}z^3 + \frac{7}{6}z^4 + \dots$$

Damit haben wir einen Ansatz, der sukzessive bessere Näherungen an die Lösung liefert. Oftmals genügt es Lösungen von Differentialgleichungen (gut) abzuschätzen. Wir zeigen induktiv, dass $a_i \geq 1$. Dies ist für $i \leq 3$ sicher richtig. Danach gilt die Abschätzung

$$(i+1)a_{i+1} = \sum_{j=0}^i a_j a_{i-j} \geq i+1,$$

woraus die Behauptung folgt. Für die Lösung $w(z)$ gilt also für $z \in \mathbb{R} > 0$

$$w(z) \geq 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}.$$

Hieraus folgt, dass die Lösung (auf $\mathbb{R}_{>0}$) bis maximal zum Punkt $z = 1$ existiert bzw. als Potenzreihe um $z = 0$ auf einem Kreis vom Radius maximal Eins konvergiert.

13.3 Der Existenzsatz von Peano

Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = \sqrt{|y|}$ bzw. das Anfangswertproblem $y(0) = 0$. Ist $g(x)$ eine Lösung, so ist offenbar auch $-y(-x)$ eine Lösung. Wir können uns also auf die Suche nach positiven Lösungen machen (und danach am Nullpunkt spiegeln). Da die rechte Seite unabhängig von x ist, liefert Integration des Ansatzes

$$\frac{dy}{\sqrt{|y|}} = dx$$

die Funktion $y_c(x) = (x+c)^2/4$. In der Umgebung eines positiven Anfangswerts sind nach Satz 13.1 damit alle Lösungen gegeben. Für den Anfangswert Null ist zudem $y = 0$ eine Lösung und man kann sich aus beiden Typen Lösungen zusammenbasteln, z.B. für $B_1, B_2 \in \mathbb{R}_{>0}$

$$y(x) = \begin{cases} (x - B_2)^2/4 & \text{für } x \geq B_2 \\ 0 & \text{für } x \in (-B_1, B_2) \\ (x + B_1)^2/4 & \text{für } x < -B_1. \end{cases}$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist offenbar bei $y = 0$ stetig, aber nicht Lipschitz-stetig, die Eindeutigkeitsaussage aus Satz 13.1 gilt offenbar unter diesen Voraussetzungen nicht. Der folgende Satz von Peano sichert aber zumindest die Existenz einer Lösung.

Satz 13.5 *Ist $f(x, y)$ in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ stetig, so geht durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$.*

Beweis : Offenbar genügt es die Existenz in einem Intervall rechts vom Startpunkt zu zeigen. Im ersten Schritt zeigen wir die Aussage unter der Zusatzannahme, dass f in einem Streifen $S = [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}$ für ein $a > 0$ (definiert und) durch die Konstante C beschränkt ist. Sei $J = [x_0, x_0 + a]$. Wir betrachten die integrierte Form der Differentialgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

und wollen für jedes $\alpha > 0$ eine „Näherungslösung“ $z_\alpha(x)$ konstruieren, welche

$$z_\alpha(x) = \begin{cases} y_0 & \text{für } x \leq x_0 \\ y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z_\alpha(t - \alpha)) dt & \text{für } x \in J \end{cases}$$

genügt. Für $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$ ist der Integrand durch den ersten Fall (die obere Zeile) wohldefiniert und wir können z_α dort definieren. Für $x \in [x_0 + \alpha, x_0 + 2\alpha]$ ist der Integrand aufgrund des soeben gesagten und der dabei konstruierten Funktion bestimmt und auf diese Weise handeln wir uns weiter, bis wir ganz J überdeckt haben. Aus $|f| \leq C$ folgt $|z'_\alpha| \leq C$, d.h. die konstruierten Funktionen sind Lipschitzstetig mit einer Lipschitz-Konstanten C , welche unabhängig von α ist. Die Folge $(z_{1/n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist also gleichgradig stetig, besitzt folglich nach dem Satz von Arzelà–Ascoli eine gleichmässig konvergente Teilfolge, die wir mit $(z_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (z_{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen. Wir bezeichnen den Limes mit $y(x)$.² Dieser Limes ist stetig auf J . Aus

$$\begin{aligned} |z_n(t - \alpha_n) - y(t)| &\leq |z_n(t - \alpha_n) - z_n(t)| + |z_n(t) - y(t)| \\ &\leq C \cdot \alpha_n + |z_n(t) - y(t)| \end{aligned}$$

folgt, dass auch $z_n(t - \alpha_n)$ gleichmässig gegen $y(t)$ auf J konvergiert. Folglich konvergiert auch $f(t, z_n(t - \alpha_n))$ gleichmässig auf J gegen $f(t, y(t))$. Wir können also in der definierenden Integralgleichung für z_{α_n} den Limes $n \rightarrow \infty$ und das Integral vertauschen und erhalten, dass $y(x)$ der gewünschten Integralgleichung genügt.

Für die allgemeine Existenzaussage betrachten wir ein Rechteck

$$R = [x_0, x_0 + a] \times \{|y - y_0| \leq b\},$$

welches ganz in D liegt und setzen $A = \max_{(x,y) \in R} \|f(x, y)\|$ sowie $\alpha = \min\{a, b/A\}$.

Wir setzen $f|_R$ stetig auf ganz $J \times \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y_0 - b) & \text{für } y < y_0 - b \\ f(x, y) & \text{für } (x, y) \in R \\ f(x_0, y_0 + b) & \text{für } y > y_0 + b \end{cases}$$

fort. Dann können wir die Existenzaussage aus dem ersten Argument verwenden, um eine Lösung y von $y' = \tilde{f}(x, y)$ zu konstruieren. Solange $(x, y(x)) \in R$ liegt, ist dies auch eine Lösung unseres eigentlichen Problems. Wegen $|\tilde{f}| \leq A$ ist $|y'| \leq A$ und damit ist für $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$ der Punkt $(x, y(x)) \in R$. \square

Man beachte, dass der Existenzsatz von Peano aufgrund der Verwendung des Satzes von Arzelà–Ascoli nicht konstruktiv ist, also kein Verfahren zum Auffinden der Lösung (auch nicht näherungsweise) angibt und sich darin vom Satz im Lipschitzstetigen Fall unterscheidet.

²Man beachte, dass zu diesem Zeitpunkt noch nicht klar ist, ob $y(x)$ die obige Integralgleichung erfüllt. Dies wird im folgenden erst bewiesen.

14 Lineare Differentialgleichungen

Ziel dieses Abschnitts ist es, Differentialgleichungen höherer Ordnung zu lösen, zumindest wenn diese linear, also von der Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (3)$$

für gegebene Funktionen $a_j(x)$ und $b(x)$ von einem reellen oder komplexen Parameter x , sind. Dazu starten wir mit einem Exkurs zu Systemen von Differentialgleichungen und erhalten eine Struktur der Lösungsmenge wie im Fall linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Im Fall konstanter Koeffizienten (die $a_j(x)$ hängen nicht von x ab) werden wir die Lösung explizit bestimmen können. Interessant wird die Struktur der Lösungen dort, wo einer der Koeffizienten $a_j(x)$ einen Pol hat - in der Nähe der sogenannten Singularitäten der Differentialgleichung.

14.1 Systeme von Differentialgleichungen

Eine Kollektion von n Funktionen (reell- oder komplexwertig)

$$F := \{F_1(x_0, \dots, x_{n+1}), \dots, F_n(x_0, \dots, x_{n+1})\}$$

bildet ein *System von Differentialgleichungen erster Ordnung*. Die n differenzierbaren Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ von einem (reellen oder komplexen) Parameter x bilden eine *Lösung* des Systems F , falls

$$F_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_j(x)) = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$

für x in einem vorgegebenen Intervall von \mathbb{R} (oder einem Gebiet von \mathbb{C}).

Sind die Funktionen F_j in der Form $F_j = x_{n+1} - f_j(x_0, \dots, x_n)$ gegeben, so nennt man das System *explizit* und schreibt kurz

$$y'_j = f_j(x, y_1, \dots, y_n), \quad j = 1, \dots, n$$

für das System von Differentialgleichungen. Wir werden im folgenden ausschließlich explizite Differentialgleichungen untersuchen. Mit der Vorgabe von $x_0, y_{0,1}, \dots, y_{0,n}$ und den Bedingungen

$$y_j(x_0) = y_{0,j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

erhalten wir ein *Anfangswertproblem* für das System erster Ordnung.

Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir fettgedruckte Buchstaben für Spaltenvektoren, also typischerweise

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad f(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \mathbf{y}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Ableitung und Integral hiervon sind ebenfalls komponentenweise zu verstehen. In dieser Notation lautet das Anfangswertproblem von oben

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}) \quad \text{und} \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0.$$

Ist $f(x, \mathbf{y}) = A(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ mit $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$) und $\mathbf{b}(x) \in \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n), so wird das System von Differentialgleichungen ein *lineares System* genannt.

Wir betrachten nochmal die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung, gegeben in (3). Ist $y(x)$ eine Lösung hiervon, so setzen wir

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y_1'(x), \quad y_3(x) = y_2'(x), \dots, y_n(x) = y_{n-1}'(x).$$

Dann gilt

$$y_n'(x) = -(a_0(x)y_1(x) + a_1(x)y_2(x) + \dots + a_{n-1}(x)y_n(x)) + b(x). \quad (4)$$

Mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

ist die so definierte (Spaltenvektor-)Funktion $\mathbf{y}(x)$ Lösung des Systems

$$\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x). \quad (6)$$

Umgekehrt, ist $\mathbf{y}(x)$ Lösung dieses Systems, so gilt (4) und damit ist $y(x) := y_1(x)$ Lösung der linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung (3). Zusammengefasst:

Proposition 14.1 *Lösungen der linearen Differentialgleichung (3) stehen in Bijektion zu Lösungen des linearen Systems (6) mit $A = A(x)$ wie in (5).*

Der Leser kann leicht eine entsprechende Bijektion von Anfangswertproblemen formulieren, wobei man bei Gleichungen n -ter Ordnung von der Physik motiviert die Anfangswerte der Funktion $y(x)$ und ihrer Ableitungen $y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ vorgibt.

14.2 Existenz- und Eindeutigkeitsätze für Systeme von Differentialgleichungen

Wie im Fall einer Differentialgleichung folgt aus einer Lipschitzbedingung für die rechte Seite ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Wir verzichten auf den Beweis, den wir im Prinzip mehrfach gesehen haben.

Die Funktion $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}): D \rightarrow \mathbb{R}^n$ genügt einer *Lipschitzbedingung* bzgl. \mathbf{y} , falls es ein $L \in \mathbb{R}$ (genannt Lipschitzkonstante) gibt, sodass für alle $(x, \mathbf{y}), (x, \tilde{\mathbf{y}}) \in D$ gilt

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \tilde{\mathbf{y}})\| \leq L \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|.$$

(Wie im Fall einer Gleichung werden auch hier nur die Funktionswerte mit festem x verglichen.) Die Lipschitzkonstante hängt von der gewählten Norm auf \mathbb{R}^n ab. Da aber je zwei Normen auf \mathbb{R}^n zueinander äquivalent sind, hängt die Existenz einer solchen Norm nicht von der gewählten Norm ab. Hat jeder Punkt $(x, \mathbf{y}) \in D$ eine Umgebung U , sodass $\mathbf{f}|_U$ einer Lipschitzbedingung genügt, so sagt man, dass \mathbf{f} einer *lokalen Lipschitzbedingung* genügt. Diese Abschwächung ist nützlich, um topologische Restriktionen an D zu umgehen:

Lemma 14.2 *Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ von \mathbf{f} für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, n$ stetig und beschränkt, und ist D konvex, so genügt \mathbf{f} einer Lipschitzbedingung bzgl. \mathbf{y} . Auch ohne Konvexitätsvoraussetzung genügt \mathbf{f} einer lokalen Lipschitzbedingung.*

Beweis : Aus dem Mittelwertsatz angewandt auf die Verbindungsstrecke zwischen \mathbf{y} und $\tilde{\mathbf{y}}$ folgt

$$f_i(x, \mathbf{y}) - f_i(x, \tilde{\mathbf{y}}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}^*)(y_j - \tilde{y}_j),$$

wobei \mathbf{y}^* auf dieser Verbindungsstrecke liegt. Ist

$$C = \max_{i,j=1,\dots,n} \sup_{(x,\mathbf{y}) \in D} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) < \infty,$$

so ist

$$\max_{i=1,\dots,n} |f_i(x, \mathbf{y}) - f_i(x, \tilde{\mathbf{y}})| \leq n \cdot C \cdot \max_{i=1,\dots,n} |y_i - \tilde{y}_i|.$$

Also ist nC eine Lipschitzkonstante für die $|\cdot|_\infty$ -Norm auf \mathbb{R}^n .

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, da jeder Punkt eine konvexe Umgebung (einen Ball) in D besitzt. \square

Satz 14.3 Falls $f(x, \mathbf{y}): D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist und einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. \mathbf{y} genügt, so hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

genau eine Lösung. Diese lässt sich bis zum Rand von D fortsetzen.

14.3 Homogene lineare Systeme

Der vorangehende Existenz- und Eindeutigkeitsatz hat eine wichtige Konsequenz für die Struktur der Lösungsmenge des homogenen Systems

$$\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}, \tag{7}$$

wobei wir den reellen Fall ($A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und y reell differenzierbar), sowie den komplexen Fall ($A(x) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und y holomorph) parallel behandeln.

Satz 14.4 Die Menge der Lösungen \mathbb{L} des homogenen linearen Systems (7), bilden einen reellen (komplexen) Vektorraum. Für jedes x_0 ist die Abbildung $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}^n$), $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}(x_0)$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist der Lösungsraum n -dimensional.

Beweis : Sind \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 Lösungen und $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $a \in \mathbb{C}$), so ist $(a\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)' = a\mathbf{y}'_1 + \mathbf{y}'_2 = A(x) \cdot (a\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$ wieder eine Lösung, woraus die erste Behauptung folgt. Zu gegebenem \mathbf{y}_0 gibt es eine Lösung \mathbf{y} mit $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ und zwar genau eine nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz. Dies zeigt die zweite Behauptung. \square

Es ist dennoch im Allgemeinen nicht einfach ein solches homogenes lineares System zu lösen. Wir untersuchen nun das d'Alembertsche Reduktionsverfahren. Es ermöglicht, ausgehend von einem homogenen System der Dimension n , von dem man bereits eine Lösung $\mathbf{y}^*(x)$ erraten hat, alle weiteren Lösungen als Lösungen eines Systems von Dimension $n - 1$ zu finden. Man macht dazu den Ansatz

$$\mathbf{y}(x) = \phi(x) \cdot \mathbf{y}^*(x) + \mathbf{z}(x), \quad \text{wobei} \quad \mathbf{z}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion ist genau dann eine Lösung, wenn

$$\mathbf{y}'(x) = \phi'(x)\mathbf{y}^*(x) + \phi(x)(\mathbf{y}^*)'(x) + \mathbf{z}'(x) = \phi(x)A(x)\mathbf{y}^*(x) + A(x)\mathbf{z}(x).$$

Da $\mathbf{y}^*(x)$ als Lösung vorausgesetzt ist, gilt dies genau dann, wenn

$$\mathbf{z}'(x) = A(x)\mathbf{z}(x) - \phi'(x) \cdot \mathbf{y}^*(x)$$

Ist $A = (a_{ij})$, so bedeutet dies ausgeschrieben für die erste Komponente

$$\sum_{j=2}^n a_{1j}(x)z_j(x) = \phi'(x) \cdot y_1^*(x) \quad (8)$$

und für $i = 2, \dots, n$ erhalten wir

$$z'_i(x) = \sum_{j=2}^n a_{ij}(x)z_j(x) - \phi'(x)y_i^*(x)$$

Daraus eliminieren wir $\phi'(x)$ und erhalten die $n - 1$ Differentialgleichungen

$$z'_i(x) = \sum_{j=2}^n \left(a_{ij} - \frac{y_i^*}{y_1^*} a_{1j} \right) z_j(x) \quad (9)$$

Hat man dieses System gelöst - was nicht immer in geschlossener Form möglich ist, so muss man nur die Gleichung (8) durch Integration nach ϕ auflösen und erhält

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{y_1^*(t)} \cdot \sum_{j=2}^n a_{1j}^{(t)} z_j(t) dt.$$

Damit kann man die Lösung $\mathbf{y}(x)$ zusammensetzen. Die Integrationskonstante bei der Bestimmung von ϕ ist irrelevant, Addition von C zu ϕ führt zur Addition der bekannten Lösung $C \cdot \mathbf{y}^*(x)$ zur neuen Lösung $\mathbf{y}(x)$.

Beispiel 14.5 Sei $n = 2$ und $A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathbf{y}^*(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$ eine Lösung von (7) und wir müssen nur eine weitere finden, um alle Lösungen als Linearkombination der beiden schreiben zu können.

Nach dem d'Alembert-Ansatz müssen wir nur das System (9) lösen, was hier eine Differentialgleichung ist.

$$z'(x) = \left(\frac{2}{x} - \left(\frac{-x}{x^2} \right) \cdot (-1) \right) z(x) = \frac{z(x)}{x}.$$

Diese Differentialgleichung ist von getrennten Veränderlichen. (Das geschieht im Fall $n = 2$ aufgrund der Gestalt von (9) immer.) Hier können wir die Lösung $z(x) = x$ sofort ablesen und es ist

$$\phi(x) = \int \frac{1}{t^2} \cdot (-1) \cdot t dt = -\ln x,$$

also

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} \cdot (-\ln x) + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \ln x \\ x + x \ln x \end{pmatrix}$$

Da $\mathbf{y}^*(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind die beiden Lösungen nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz in der Tat linear unabhängig.

14.4 Inhomogene lineare Systeme

Wie im eindimensionalen Fall erhält man alle Lösungen des Systems

$$\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x), \quad A(x) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n, \quad (10)$$

indem man eine („spezielle“) Lösung des inhomogenen Systems findet und dazu eine Linearkombination der Lösungen des homogenen Systems addiert. Angenommen man hat bereits eine Basis $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$ von Lösungen von $\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x)$ gefunden. Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu finden, hilft wie im eindimensionalen Fall die Methode der „Variation der Konstanten“. Wir schreiben die Lösungen des homogenen Systems in eine Matrix $Y(x) = (\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x))$ mit der Eigenschaft $Y'(x) = A(x)Y(x)$ und machen den Ansatz

$$\mathbf{z}(x) = Y(x) \cdot \mathbf{v}(x), \quad \text{wobei } \mathbf{v}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Diese Funktion ist eine Lösung von (10) genau dann, wenn

$$\mathbf{z}'(x) = Y'(x) \cdot \mathbf{v}(x) + Y(x) \cdot \mathbf{v}'(x) = A(x) \cdot Y(x) \mathbf{v}(x) + Y(x) \cdot \mathbf{v}'(x) = A(x)Y(x)\mathbf{v}(x) + \mathbf{b}(x),$$

also wenn

$$Y(x) \cdot \mathbf{v}'(x) = \mathbf{b}(x)$$

Nach Satz 14.4 ist $Y(x)$ in der Nähe des Anfangspunkts x_0 invertierbar, also ist

$$\mathbf{v}(x) = \int_{x_0}^x Y^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t) dt.$$

Man prüft leicht, dass $\mathbf{z}(x)$ nun in der Tat eine Lösung des inhomogenen linearen Systems ist.

Wir setzen das Beispiel 14.5 fort und betrachten das inhomogene Problem mit $\mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 \end{pmatrix}$. In der Notation des obigen Ansatzes ist

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 \ln x \\ -x & x + x \ln x \end{pmatrix},$$

also

$$Y^{-1}(x) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} x(1 + \ln x) & x^2 \ln x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$$

und daher

$$Y^{-1}(x)\mathbf{b}(x) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} \ln x + 1 - x^2 \ln x \\ 1 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\mathbf{v}(x) = \int_1^x Y^{-1}(t)\mathbf{b}(t) dt = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x^2 - 1 + (4 - x^2 + \ln x) \ln x \\ 4 \ln x - 2x^2 + 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{z}(x) = Y(x) \cdot \mathbf{v}(x) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x^2(x^2 - 1 + 2 \ln x - 2 \ln^2 x) \\ x(3 - 3x^2 + 2 \ln x + 2 \ln^2 x) \end{pmatrix}.$$

14.5 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun homogene lineare Systeme $\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{y}(x)$, wobei die Matrix ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oder $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$) nicht von x abhängt, also konstante Koeffizienten hat. Dabei ist der Ansatz

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{c} \quad \text{mit } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{oder } \mathbb{C}^n)$$

nützlich. Diese Funktion ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn gilt

$$\mathbf{y}'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot \mathbf{c} = A \cdot \mathbf{c} \cdot e^{\lambda x}.$$

Dies ist der Fall, wenn

$$A \cdot \mathbf{c} = \lambda \cdot \mathbf{c}$$

ist, also falls λ ein Eigenwert von A ist und \mathbf{c} ein zugehöriger Eigenvektor.

Proposition 14.6 *Hat die Matrix A n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ (zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$), so sind alle Lösungen der Differentialgleichung $\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{y}(x)$ Linearkombinationen von $\{e^{\lambda_1 x} \cdot \mathbf{c}_1, \dots, e^{\lambda_n x} \cdot \mathbf{c}_n\}$. Die Voraussetzung ist insbesondere dann erfüllt, wenn A n verschiedene Eigenwerte hat.*

Beweis : An der Stelle $x = 0$ haben die n angegebenen Lösungen die Werte $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$. Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen folgt also nach Satz 14.4. Für die zweite Aussage ist zu zeigen, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Dies folgt durch Induktion nach n . Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig. Ist

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{c}_i, \quad \text{also} \quad 0 = A \cdot 0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{c}_i.$$

Wir können durch Umnummerieren annehmen, dass $\lambda_n \neq 0$ ist. Durchmultiplizieren der ersten Gleichung mit λ_n und anschließende Subtraktion ergibt

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) \cdot \mathbf{c}_i = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt für jedes $i \leq n-1$, dass $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) = 0$. Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, muss $\alpha_i = 0$ für $i \leq n-1$ sein und dann folgt auch $\alpha_n = 0$. Dies beweist die lineare Unabhängigkeit. \square

Im Hinblick auf den allgemeinen Fall betrachten wir das Verhalten einer Lösung \mathbf{y} unter einer invertierbaren linearen Abbildung $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Der neue Vektor $\mathbf{z} = C\mathbf{y}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\mathbf{z}'(x) = C \cdot \mathbf{y}'(x) = C \cdot A \cdot \mathbf{y}(x) = C \cdot A \cdot C^{-1} \cdot \mathbf{z}(x).$$

Dies bedeutet umgekehrt, dass falls wir eine Lösung $\mathbf{z}(x)$ des linearen Systems mit der transformierten Matrix CAC^{-1} kennen, so kennen wir auch $\mathbf{y}(x) = C^{-1} \cdot \mathbf{z}(x)$, eine Lösung des ursprünglichen Systems. Durch eine Transformation $A \rightarrow CAC^{-1}$ lässt sich jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in Jordan-Normalform bringen. Wir behandeln daher im Rest dieses Abschnitts den komplexen Fall.

Sei $J \in D^{r \times r}$ ein Jordankästchen der Länge r zum Eigenwert λ . Die Differentialgleichung $\mathbf{y}'(x) = J \cdot \mathbf{y}(x)$ bedeutet ausgeschrieben

$$y_r'(x) = \lambda \cdot y_r(x), y_{r-1}'(x) = \lambda \cdot y_{r-1}(x) + y_r, \dots, y_2'(x) = \lambda y_1(x) + y_2.$$

Dies lässt sich leicht sukzessive lösen, man erhält

$$y_r(x) = e^{\lambda x}, y_{r-1}(x) = x e^{\lambda x}, y_{r-2}(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{\lambda x}, \dots,$$

falls $y_r(x) \neq 0$. Mit $y_r(x) = 0$ erhält man eine weitere Lösung, beginnend mit $y_{r-1}(x) = e^{\lambda x}, y_{r-2}(x) = x e^{\lambda x}$. Insgesamt lassen sich r linear unabhängige Lösungen zusammenfassen als

$$Y_{\lambda,r}(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} & \frac{1}{2} x^2 e^{\lambda x} & \dots & \frac{1}{(r-1)!} x^{r-1} e^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} & \dots & \frac{1}{(r-2)!} x^{r-2} e^{\lambda x} \\ 0 & 0 & e^{\lambda x} & \dots & \frac{1}{(r-3)!} x^{r-3} e^{\lambda x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & e^{\lambda x} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Durch Zusammenfassen der Lösungen der Jordanblöcke und der obigen Basiswechselbeobachtung erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz 14.7 Sei $\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{y}(x)$ mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ein komplexes, homogenes System mit konstanten Koeffizienten. Sei $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix, sodass

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

in Jordannormalform mit Jordankästchen J_1, \dots, J_k der Dimension r_1, \dots, r_k zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, welche nicht notwendig verschieden sind. Dann ist

$$Y(x) = C^{-1} \begin{pmatrix} \boxed{Y_{\lambda_1, r_1}(x)} & & & \\ & \boxed{Y_{\lambda_2, r_2}(x)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{Y_{\lambda_k, r_k}(x)} \end{pmatrix}$$

mit $Y_{\lambda_j, r_j}(x)$ wie in (11) ein System von n linear unabhängigen Lösungen.

Es gibt noch einen zweiten Ansatz zum Auffinden der Lösungen, in dem man gestattet in Potenzreihen Matrizen einzusetzen. Ist $P = \sum_{i=0}^n c_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so definiert man $P(A) = \sum_{i=0}^n c_i A^i$. Insbesondere ist für $A = B \cdot x$ (d.h. $a_{ij} = b_{ij} \cdot x$) das Einsetzen definiert als

$$p(B \cdot x) = \sum_{i=0}^n c_i (B \cdot x)^i.$$

Daher gilt $\frac{d}{dt} P(B \cdot x) = B \cdot P'(B \cdot x)$.

Sei nun $P = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i$ eine Potenzreihe. Wir wollen auch das Einsetzen von Matrizen als Grenzwert der Partialsummen definieren. Dazu versehen wir den Vektorraum $V = \mathbb{C}^{n \times n}$ mit einer Norm. Obwohl alle Normen äquivalent sind, ist es rechentechnisch günstig eine *erträgliche* Norm zu wählen, d.h. sodass $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ gilt. Die Supremumsnorm $\|A\| = \max_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ hat diese Eigenschaft.

Hat also P den Konvergenzradius r , so definieren wir für Matrizen A mit $\|A\| = s < r$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k c_i A^i.$$

Dieser Limes existiert und die Reihe ist absolut konvergent, denn

$$\sum_{i=0}^k |c_i| \|A^i\| \leq \sum_{i=0}^k |c_i| \|A\|^i = \sum_{i=0}^k |c_i| \cdot s^i$$

und nach Definition des Konvergenzradius ist der Limes hiervon für $k \rightarrow \infty$ existent und ist endlich.

Also ist

$$P(Bx) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (B \cdot x)^i$$

für $|x| < x_0 = \frac{r}{\|A\|}$ absolut konvergent und lokal gleichmäßig konvergent. Folglich kann man Ableitung und Summation vertauschen und erhält

$$\frac{d}{dx}P(Bx) = B \cdot P'(B \cdot x).$$

Wir spezialisieren nun auf die Exponentialreihe. Diese konvergiert auf ganz \mathbb{C} und es gilt

$$(e^{Ax})' = A \cdot e^{Ax}$$

nach der oben hergeleiteten Ableitungsregel. Also ist e^{Ax} eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = A \cdot y(x)$. Zum Vergleich mit der im Satz beschriebenen Lösung genügt es, den Fall $A = J_r$ eines Jordankästchens zum Eigenwert λ zu betrachten. Man rechnet leicht nach, dass $Y_{\lambda,r}(x) = e^{I_r \cdot x}$ ist, wie es nach dem Eindeutigkeitsatz auch sein musste.

14.6 Singularitäten

Wir interessieren uns nun für holomorphe Lösungen der Differentialgleichungen $y'(z) = A(z) \cdot y(z)$, wobei $A(z)$ an einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Singularität besitzt, d.h. $A(z)$ ist holomorph auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Durch die Verschiebung $z \mapsto z_0$ können wir immer annehmen, dass 0 die Singularität ist.

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(z) = \frac{c}{z} \cdot y(z)$ für $c \in \mathbb{C}$, welche vom oben genannten Typ ist. Formal ist $y(z) = z^c$ eine Lösung. Für $c \in \mathbb{Z}$ ist dies eine Lösung auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $c = \frac{1}{3}$ sei $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$. Dann sind $y_i(z) = \zeta_3^i \cdot \sqrt[3]{z}$ Lösungen. Allgemeiner ist für $c \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ die Lösung auf G holomorph, aber vieldeutig. Und für $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, insbesondere $c \notin \mathbb{R}$? Wir haben im Abschnitt Funktionentheorie weder allgemeine komplexe Potenz noch die Logarithmusfunktion ausführlich diskutiert und fassen dies kurz zusammen.

Auf jedem sternförmigen Gebiet, das Null nicht enthält, also z.B. $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, kann man den Logarithmus definieren durch

$$\log(z) = \int_1^z \frac{dt}{t}.$$

Diesen Definitionsbereich kann man nicht vergrößern, denn es gilt für $c \in \mathbb{R}_{<0}$ nach Lemma 6.1

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} \log(z) - \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} \log(z) = 2\pi i.$$

Es ist $e^{\log(z)} = z$, wie man durch Ableiten leicht nachprüft.

Damit kann man nun die allgemeine Potenz erklären als

$$z^c := e^{c \log(z)},$$

aber eben nur dort, wo eine Logarithmusfunktion definiert ist, also z.B. auf $B_1(0) \cap \mathbb{C}^-$. Es gibt in der Tat keine Lösung der Differentialgleichung für $c \notin \mathbb{Z}$, denn auf $B_1(0) \cap \mathbb{C}^-$ ist die Lösung z^c die Einzige nach den Eindeutigkeitssätzen, aber für $z_0 \in \mathbb{C}^-$ ist

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} z^c / \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} z^c = e^{c \cdot 2\pi i} \neq 1.$$

Andererseits kann man auf der sternförmigen Menge $\mathbb{C}^+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch $\widetilde{\log}(z) = \int_{-1}^z \frac{dt}{t}$ ebenfalls einen Logarithmus definieren. Auf der oberen Halbebene \mathbb{H} unterscheiden sich $\log(z)$ und $\widetilde{\log}(z)$ nur durch eine additive Konstante. Mittels $B_1(0) \cap \mathbb{C}^+$ und $B_1(0) \cap \mathbb{C}^-$ hat man $B_1(0) \setminus \{0\}$ überdeckt und auf jeder der zwei offenen Mengen eine Lösung der Differentialgleichung gefunden. Man sagt $e^{c \log(z)}$ ist eine *mehrwertige* Lösung der Differentialgleichung auf der ganzen Umgebung $B_1(0) \setminus \{0\}$. Solche mehrwertigen Funktionen sind Grundlage des Konzepts, das Riemann als „Überlagerungsflächen“ (heutzutage *Riemannsche Flächen* genannt) formuliert hat.

Auch in Systemen vom Rang größer 1 funktioniert das gleiche Prinzip. Die Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(z) = \frac{A}{z} \cdot \mathbf{y}(z)$$

hat die Lösung

$$\mathbf{y}(z) = z^A := e^{A \cdot \log(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (\log(z))^k}{k!}$$

auf \mathbb{C}^+ oder \mathbb{C}^- , wobei man den Zweig $\log(z)$ oder $\widetilde{\log}(z)$ des Logarithmus entsprechend wählt.

Der folgende Satz sagt, dass die Beispiele repräsentativ sind, d.h. dass sich Lösungen an singulären Punkten stets aus holomorphen Funktionen und einer allgemeinen Potenz schreiben.

Satz 14.8 Ist $A(z)$ auf $B_r(0) \setminus \{0\}$ holomorph, so hat die Differentialgleichung $\mathbf{y}'(z) = A(z) \cdot \mathbf{y}(z)$ eine Basis von Lösungen der Form $y_1(z), \dots, y_n(z)$, wobei

$$Y(z) = (y_1(z), \dots, y_n(z)) = U(z) \cdot z^B.$$

Dabei ist $U(z)$ auf $B_r(0) \setminus \{0\}$ holomorph und B eine konstante Matrix.

Beweis : Wir nehmen an, $y_1(z), \dots, y_n(z)$ seien Lösungen und setzen $W(s) = Y(e^s)$. Dann gilt

$$\frac{d}{ds}W(s) = e^s A(e^s) \cdot W(s).$$

Da A auf dem Bild der Exponentialfunktion holomorph ist, hat die Differentialgleichung $w'(s) = e^s A(e^s) \cdot w(s)$ auf $B_{\log(s)}(0)$ eine Basis von Lösungen $w_1(s), \dots, w_n(s)$, die wir zu einer Matrix $W(s)$ zusammenfassen. Nun ist $e^s A(e^s)$ periodisch mit Periode $2\pi i$, d.h. $W(s + 2\pi i)$ enthält wieder eine Basis von Lösungen. Also gibt es eine invertierbare Matrix C mit

$$W(s + 2\pi i) = W(s) \cdot C.$$

Der wesentliche Hilfssatz untenstehend zeigt die Existenz einer Matrix B mit der Eigenschaft $e^{2\pi i B} = C$. Für $T(s) = W(s) \cdot e^{-Bs}$ gilt dann

$$T(s + 2\pi i) = W(s + 2\pi i) \cdot e^{-B(s+2\pi i)} = W(s) \cdot e^{2\pi i B} \cdot e^{-B(s+2\pi i)} = T(s).$$

Also ist $U(z) = T(\log(z))$ eine auf ganz $B_r(0)$ definierte holomorphe matrixwertige Funktion. Schließlich ist

$$Y(z) = W(\log z) = T(\log(z)) e^{B \log(z)} = T(\log(z)) z^B$$

von der gewünschten Gestalt. □

Lemma 14.9 *Ist $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär, so gibt es eine Matrix B mit $e^B = C$.*

Beweis : Im ersten Schritt nehmen wir an, es sei $C = E + R$ mit $\|R\| \leq 1/3$. Wir betrachten den Operator

$$S(X) = X + E + R - e^X.$$

Ein Fixpunkt B dieses Operators ist eine Matrix der gewünschten Eigenschaft $e^B = C$. Wir zeigen, dass S die Menge $K = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} : \|X\| \leq 2/3\}$ in sich abbildet und kontrahierend ist. Ist $\|X\| \leq \alpha = 2/3$, so ist

$$\|S(X)\| = \left\| R - \left(\frac{1}{2!} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \dots \right) \right\| \leq \frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots = e^\alpha - 1 - \alpha + \frac{1}{3} < \frac{2}{3}.$$

Aus Zerlegungen der Bauart

$$X^3 - Y^3 = X^2(X - Y) + X(X - Y)Y + (X - Y)Y^2$$

zeigt man für $X, Y \in K$, dass $\|X^3 - Y^3\| \leq 3\alpha^2 \|X - Y\|$ gilt, allgemein $\|X^k - Y^k\| \leq k\alpha^{k-1} \|X - Y\|$.

Daraus folgt

$$\|S(X) - S(Y)\| = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{X^k - Y^k}{k!} \right\| \leq \|X - Y\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\alpha^{k-1}}{k!} = \|X - Y\| (e^\alpha - 1) < \|X - Y\|.$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun der erste Fall.

Der allgemeine Fall folgt durch Konjugation auf Jordan-Normalform. \square

14.7 Die gedämpfte Schwingung

Zum Schluss noch ein bekanntes Beispiel aus der Physik: Der *gedämpfte harmonische Oszillator* oder die *gedämpfte Schwingung*. Sie beschreibt z.B. die Auslenkung eines Pendels in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + 2ky' + \omega^2 y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $k, \omega > 0$. Setzt man zunächst $k = 0$, so kann man die beiden Fundamentallösungen $\cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$ leicht erraten, ω spielt also die Rolle der Schwingungsfrequenz für eine *ungebremte* Schwingung, tauglich nur für eine sehr idealisierte Modellannahme. (Auch die Annahme, dass die Beschleunigung genau zur Auslenkung proportional ist, ist selbst bei ganz einfachen Systemen nur in erster Näherung erfüllt.) Der mittlere Term beschreibt die – auch nur in erster Näherung erfüllte – Annahme, dass die Beschleunigung gemindert wird durch einen Brems-Term, der proportional zur Geschwindigkeit ist. Die Übersetzung des Ansatzes, der oben für lineare Dgl-Systeme mit konstanten Koeffizienten beschrieben wurde, liefert hier einen Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Einsetzen in die Dgl. und Division durch den gemeinsamen Faktor $e^{\lambda x}$ liefert eine *charakteristische* oder *Eigenwert-Gleichung* für λ :

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0 \quad \iff \quad \lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2},$$

in der Regel also zwei komplexe Werte für λ bzw. zwei komplexe Fundamentallösungen der Dgl.

Es lohnt sich, die verschiedenen Möglichkeiten genauer unter die Lupe zu nehmen:
1. Fall, $k > \omega$, starke Dämpfung: Beide Fundamentallösungen sind reell und exponentiell abfallend, es tritt also gar keine Schwingung im eigentlichen Sinn auf.

2. Fall, $k < \omega$, schwache Dämpfung: Setzen wir $\omega_1^2 := \omega^2 - k^2$, so lauten die beiden Fundamentallösungen $y(x) = e^{(-k \pm i\omega_1)x}$. Dank unserer Kenntnis der komplexen Exponentialfunktion können wir sie ersetzen durch zwei reelle Lösungen

$$e^{-kx} \cos(\omega_1 x) \quad \text{und} \quad e^{-kx} \sin(\omega_1 x),$$

also zwei (linear unabhängige) trigonometrische Funktionen gleicher Periode, beide überlagert durch die gleiche abfallende Exponentialfunktion – in der Tat eine gedämpfte Schwingung.

3. Fall, $k = \omega$, der sogenannte *aperiodische Grenzfall*. Hier liefert der Ansatz nur die eine Lösung e^{-kx} , es fehlt also noch eine zweite davon unabhängige Fundamentallösung. Die Übersetzung in ein System von zwei linearen Dgln. 1. Ordnung liefert hier in der Tat ein Jordan-Kästchen. Alternativ kann man hier den Ansatz direkt modifizieren durch $y(x) = xe^{-kx}$, was in der Tat die zweite gesuchte (reelle) Fundamentallösung liefert.

Index

- \hat{C} -Kreise, 43
- abgeschlossen, 3
- Ableitungsregeln, 7
- Additionstheorem, 19
- affine Gerade, 46
- Alexandroff-Kompaktifizierung, 42
- analytisch, 30
- Anfangswertproblem, 52, 68
- Argument, 19
- Argumentprinzip, 41
- Arzelà-Ascoli, 66
- Automorphismengruppe, 44
- Banach'scher Fixpunktsatz, 58
- Banachraum, 58
- beschränkt, 3
- Betrag, 3
- biholomorph, 8
- Casorati-Weierstrass, 37
- Cauchy-Riemann-Dgln., 6
- Cauchy-Ungleichungen, 34
- Cayley-Transformation, 9
- charakteristische Gleichung, 80
- d'Alembert-Reduktion, 71
- Differentialgleichungen
 - n -ter Ordnung, 51
 - explizite, 52, 67
 - gewöhnliche, 2
 - Lösung, 51
 - lineare, 56, 67
 - partielle, 2
 - Substitutionsmethoden, 55
 - System, 67
- differenzierbar
 - komplex, 4
 - reell, 4
- Doppelverhältnis, 46
- Dreiecksungleichung, 3
- Einheitskreisscheibe, 9
- Einheitswurzeln, 19
- Exponentialfunktion, 11
- Fundamentalsatz d. Algebra, 33
- Funktionentheorie, 2
- ganze Funktion, 33
- Gebiet, 4
- getrennte Veränderliche, 54
- glatt, 20
- gleichgradig stetig, 66
- Gruppenhomomorphismus, 17
- Gruppenisomorphismus, 18
- harmonischer Oszillator, 80
- Hauptteil, 38
- Hebbarkeitssatz, 36
- holomorph, 4
- hypergeometrische Funktionen, 12
- Identitätssatz, 33
- Imaginärteil, 3
- integrierbar, 24
- isolierte Nullstellen, 32
- Kartenabbildung, 43
- Kettenregel, 7, 48
- komplexe Konjugation, 3
- komplexe Mannigfaltigkeit, 43
- komplexe Zahlen, 1, 3

konforme Abbildungen, 6
kontrahierende Abbildung, 58
Konvergenz, 3
 absolute, 11
 gleichmäßige, 13
 lokal gleichmäßige, 14
 normale, 14
Konvergenzradius, 10
Kreisring, 39
Kurvenintegral, 20

Laurentreihe, 38
Liouville, 33
Lipschitz–stetig, 57
Lipschitzbedingung, 69
Logarithmusreihe, 11

Möbius–Transformationen, 9, 44
Maximumsprinzip, 35
meromorph, 40
Mittelwerteigenschaft, 35
Morera, 36
Multiplizität, 41

Nullstellenordnung, 33

obere Halbebene, 8
offen, 3

Peano, 65
Picard, 37
Picard–Lindelöf, 57
Pol, 37
Polarkoordinaten, 19
Polordnung, 37
Potenzreihe, 10
projektive Gerade, 46
rationale Funktionen, 47
Realteil, 3
Residuensatz, 40
Residuum, 38
Riemannsches Flächenmaß, 43, 78
Riemannsches Zahlenkugelmaß, 42

Schwingungsdgl, 80
Singularität, 35
 hebbare, 36
 Pol, 37
 wesentliche, 37
Stammfunktion, 23
stereographische Projektion, 43
sternförmig, 25

trigonometrische Funktionen, 11

Variation der Konstanten, 57

Weg, 3
 geschlossener, 4
wegzusammenhängend, 4
zusammenhängend, 4