Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 14

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 01.02.2016
Übungen: M. Nickel

Auf diesem Blatt sei G stets eine endliche Gruppe.

Übung 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie: ist G einfach und nicht abelsch, so gilt $|G| \neq 24, 30$.

Übung 2 (4 Punkte)
Man zeige: ist G einfach und nicht abelsch, so ist $|G| \neq 260$ (Tipp: man betrachte 13-Sylowgruppen).

Übung 3 (4 Punkte)
Sei G einfach und nicht abelsch, $H \leq G$ eine Untergruppe und $|G : H| = n$. Zeigen Sie, dass dann $|G| \leq n!$ gilt.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei $K \lhd G$ ein Normalteiler und $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ eine p-Sylowgruppe. Zeigen Sie, dass dann $K \cap P \in \mathrm{Syl}_p(K)$ und $PK/K \in \mathrm{Syl}_p(G/K)$ gelten. Zeigen Sie hierfür: sind $A, B \leq G$ Untergruppen, so gilt

$$|AB| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}.$$

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.

Übung 5
Zeigen Sie: für $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ beliebig gilt: $|\mathrm{Syl}_p(G)| = |G : N_G(P)|$.

Übung 6
Ist $|G| = p^k m$ mit p prim und $p \nmid m$ und ist $N \lhd G$ ein Normalteiler mit $|N| = m$, so heißt N ein normales p-Komplement.
Zeigen Sie: ein normales p-Komplement ist eindeutig, falls es existiert.

Übung 7
Sei G einfach und nicht abelsch. Zeigen Sie: $|G| \not\equiv 2 \bmod 4$ (man zeige, dass es ein normales p-Komplement gibt).

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 08.02.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.