Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 9

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 14.12.2015

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (2 Punkte)
Sei v eine diskrete Bewertung auf dem Körper K. Zeigen Sie: es gilt für alle $x \in K^\times$:

(a) $v(-x) = v(x)$ und insbesondere $v(-1) = 0$

(b) $v(1/x) = -v(x)$.

Übung 2 (4 Punkte) Die nicht-archimedische Dreiecksungleichung
Sei v eine diskrete Bewertung auf dem Körper K. Dann gilt für $x, y, x+y \in K^\times$: ist $v(x) \neq v(y)$, so ist $v(x+y) = \min\{v(x), v(y)\}$.

Übung 3 (2+2+2+2+2 Punkte)
Sei v eine diskrete Bewertung auf dem Körper K. Man zeige:

(a) Die Menge
$$\{x \in K^\times \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$$
ist ein Unterring von K mit $\mathrm{Quot}(R) = K$, der sogenannte Bewertungsring von v.

(b) Die Einheitengruppe von R ist
$$R^\times = \{x \in K^\times \mid v(x) = 0\}.$$

(c) Der Ring R ist ein Hauptidealring mit einem bis auf Einheiten eindeutigen Primelement. Die Primelemente sind genau die $x \in R$ mit $v(x) = 1$.

(d) Der Ring R hat ein eindeutiges maximales Ideal
$$\mathfrak{m} = \{x \in K^\times \mid v(x) > 0\} \cup \{0\},$$
und dieses wird von π erzeugt, wenn $v(\pi) = 1$.

(e) Der Faktorring $k = R/\mathfrak{m}$ ist ein Körper, der Restklassenkörper von v genannt wird.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 4
Sei K ein Körper und $K[[T]]$ der Potenzreihenring.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} v : K((T))^\times &\to \mathbb{Z} \\ v(\sum_{i\geq 0} a_i T^i) &\mapsto \min\{i \mid a_i \neq 0\} \end{aligned}$$

eine diskrete Bewertung auf $K((T)) := \mathrm{Quot}(K[[T]])$ gegeben wird und geben Sie den Bewertungsring, das maximale Ideal und den Restklassenkörper von v an.

(b) Zeigen Sie, dass $K((T)) = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}K[[T]]$ gilt.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Zeigen Sie, dass für jede Primzahl p

$$\begin{aligned} v_p : \mathbb{Q}^\times &\to \mathbb{Z} \\ v_p(p^n \frac{a}{b})) &= n \text{ wenn p} \nmid ab \end{aligned}$$

eine diskrete Bewertung auf $\mathbb{Q}$ definiert und geben Sie den Bewertungsring und den Restklassenkörper an.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 21.12.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.