Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 8

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 7.12.2015

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Geben Sie alle normierten, irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 4 in $\mathbb{F}_p[T]$ für $p \leq 3$ an.

Übung 2 (2+2+2+2+2+2 Punkte) Die Zeta-Funtion des Polynomrings.

(a) Für ein Ideal $(0) \neq \mathfrak{a} \subset \mathbb{F}_q[X]$ setzt man $N(\mathfrak{a}) := \#\mathbb{F}_q[X]/\mathfrak{a}$ die Anzahl der Elemente von $\mathbb{F}_q[X]/\mathfrak{a}$. Zeigen Sie, dass $N(\mathfrak{a}) \in \mathbb{N}$ und bestimmen Sie $N(\mathfrak{a})$ für $\mathfrak{a} = (f)$. Zeigen Sie weiterhin, dass $N(\cdot)$ multiplikativ ist: für alle $0 \neq f, g \in \mathbb{F}_q[X]$ gilt $N((fg)) = N((f))N((g))$.

(b) Geben Sie das Inverse von $1 - aT^r, a \in \mathbb{Q}, r > 0$ bezüglich der Multiplikation im Ring der Potenzreihen $\mathbb{Q}[[T]]$ an. Wir schreiben dafür $\frac{1}{1-aT^r}$.

(c) Wir definieren die Zeta-Funktion

$$Z_{\mathbb{F}_q[X]}(T) := \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathbb{F}_q[X]} T^{N(\mathfrak{a})} \in \mathbb{Q}[[T]],$$

wobei über alle von (0) verschiedenen Ideale $\mathfrak{a}$, auch $\mathbb{F}_q[X]$, summiert wird. Zeigen Sie, dass $Z_{\mathbb{F}_q[X]}(T)$ ein Element von $\mathbb{Q}[[T]]$ definiert und, dass $Z_{\mathbb{F}_q[X]}(T) = \frac{1}{1-qT}$ gilt.

(d) Wir übersetzen nun die eindeutige Primfaktorzerlegung von $\mathbb{F}_q[X]$ in eine Produktzerlegung von $Z_{\mathbb{F}_q[X]}(T)$. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Q}[[T]]$ das Eulerprodukt gilt:

$$Z_{\mathbb{F}_q[X]}(T) = \prod_{f \in \mathbb{F}_q[X] \text{ irreduzibel, normiert}} \frac{1}{1 - T^{N((f))}}.$$

Es ist zu begründen, warum das Produkt eine Potenzreihe in $\mathbb{Q}[[T]]$ darstellt.

(e) Sei N_d die Anzahl der normierten, irreduziblen Polynome vom Grad d in $\mathbb{F}_q[X]$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$q^n = \sum_{d|n} dN_d,$$

indem Sie formal die Operation $T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\cdot)$ auf beiden Seiten der Identität aus (c) und (d) anwenden. Dabei ist $\log(\cdot)$ nur für Potenzreihen mit konstantem Term 1 als

$$\log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

definiert. Dies ist wegen der gleichen Gründe sinnvoll, die in (d) das unendliche Produkt als wohldefiniert nachweisen. Differenziert werden die formalen Potenzreihen gliedweise.
Tipp: Für diesen formalen Logarithmus gilt ebenso $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, auch für unendlich viele Faktoren.

(f) Berechnen Sie die Anzahl der irreduziblen, normierten Polynome vom Grad d in $\mathbb{F}_q[X]$ für $d = 12$ und $q = 2, 3, 4$.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 3
Wann ist $\mathbb{F}_q$ ein Unterkörper von $\mathbb{F}_{q'}$?

Übung 4 Zeigen Sie, dass $T^q - T + 1$ in $\mathbb{F}_q[T]$ keine Nullstelle hat. Folgern Sie daraus, dass ein algebraisch abgeschlossener Körper nicht endlich sein kann.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie, dass der Primkörper $\mathbb{F}_p$ von K der Fixkörper

$$\{x \in K \mid \text{Frob(x)=x}\}$$

des Frobenius ist.

Übung 6
Sei K ein Körper und $K(X)$ der Quotientenkörper von $K[X]$. Zeigen Sie, dass die Quotientenregel eine Derivation auf $K(X)$ definiert:

$$(\frac{g}{h})' = \frac{g'h - gh'}{h^2}.$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 14.12.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.