Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 11.11.2014
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Es seien L_1/K und L_2/K zwei Körpererweiterungen.
Zeigen Sie, dass ein Körperhomomorphismus $f : K_1 \to K_2$ genau dann K-linear ist (also eine lineare Abbildung der zugrundeliegenden K-Vektorräume), wenn $f(a) = a$ für alle $a \in K$ gilt. Dabei identifizieren wir K sowohl mit seinem Bild in L_1 als auch mit seinem Bild in L_2.

Übung 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie: zwei quadratische Erweiterungen $K(\sqrt{a}), K(\sqrt{b})$ sind genau dann isomorph als Erweiterungen von K, wenn $a/b \in K^2$ ein Quadrat in K ist.

Übung 3 (4 Punkte)
Man zeige, dass $T^4 - 5$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[T]$ ist.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei $M = M_1M_2$ das Kompositum der Zwischenkörper M_1, M_2 in einer Erweiterung L/K. Zeigen Sie:

(a) M/K ist endlich genau dann, wenn M_1/K und M_2/K endlich sind.

(b) Wenn M/K endlich ist, dann gilt

$$[M : K] \leq [M_1 : K] \cdot [M_2 : K] \,.$$

Geben Sie ein Beispiel an, wo $[M : K]$ kein Teiler von $[M_1 : K] \cdot [M_2 : K]$ ist.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Machen Sie sich die universelle Eigenschaft von Quotientenringen klar.
Zeigen Sie folgenden Spezialfall: Sei $R = K[T]$, $I = (f) \subset K[T]$. Ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ faktorisiert durch $\pi : K[T] \to K[T]/(f)$ (das heißt es gibt $\tilde{\varphi} : K[T]/(f) \to S$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$) genau dann, wenn $\varphi(f) = 0$.

Übung 6
Zeigen Sie, dass jeder Ring auf eindeutige Weise eine $\mathbb{Z}$-Algebra ist.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 7
Sei K ein Körper und $G \subset K^\times$ eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe $K^\times$. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.
Anleitung: Beweis durch Widerspruch. Sei G ein kleinstes Gegenbeispiel. Dann ist G von zwei Elementen $x, y \in G$ der Ordnung N bzw. M erzeugt. Mit Hilfe des chinesischen Restsatz kann man auf die Situation reduzieren, in der N und M Potenzen einer Primzahl p sind. Sei dann $M \mid N$. Dann ist y eine Lösung der Gleichung

$$T^N = 1$$

die schon die N Lösungen $1, x, \ldots, x^{N-1}$ hat. Da K ein Körper ist, muss y in dieser Liste enthalten sein.
Man begründe die einzelnen Schritte.

Übung 8
Sei L/K eine Körpererweiterung und seien E, F Zwischenkörper, die endlich über K sind. Zeigen Sie die folgende Beschreibung des Kompositums EF

$$EF = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in E, x_i \in F, i = 1, \ldots, n\}.$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 23.11.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.