

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

03.11.2014

Übung 1 (4 Punkte)

Finden Sie einen K -Vektorraum V und zwei Endomorphismen $\varphi, \psi \in \text{End}_K(V)$, so dass $m_\psi = m_\varphi$ und $P_\varphi = P_\psi$ gilt, aber φ und ψ verschiedene Jordannormalformen haben. Was ist die kleinste Dimension $\dim_K(V)$, in der solche Beispiele konstruiert werden können?

Übung 2 (4 Punkte)

Sei $\sqrt[3]{5}$ die eindeutige reelle dritte Wurzel von 5, und sei $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$. Zeigen Sie, dass der reelle Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \subset \mathbb{R}$ zum komplexen Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5} \cdot \zeta_3) \subset \mathbb{C}$ isomorph ist.

Übung 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ nur endlich viele Zwischenkörper enthält.

Übung 4 (4 Punkte)

Sei L/K eine endliche Erweiterung. Zeigen Sie, dass jeder Unterring $R \subset L$, der K enthält, schon ein Körper ist.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5

Sei $\dim_K(V) = 3$ und $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass dann die Jordannormalform bereits durch das Minimalpolynom m_φ und das charakteristische Polynom P_φ von φ bis auf Permutation der Jordanblöcke festgelegt ist.

Übung 6

Seien M_1 und M_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K . Dann sind äquivalent:

- $M_1 = M_2$
- $M_1 \subset M_2$ und $[M_2 : M_1] = 1$.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 7

Seien K_1 und K_2 zwei Körpererweiterungen von \mathbb{Q} . Zeigen Sie, dass $K_1 \cong K_2$ als Körper genau dann wenn $K_1 \cong K_2$ als Körpererweiterung von \mathbb{Q}

Übung 8

Sei L/K eine quadratische Erweiterung eines Körpers K mit $2 \in K^\times$. Zeigen Sie, dass L aus K durch Adjunktion einer Quadratwurzel entsteht: es gibt ein $\alpha \in L$ mit $\alpha^2 \in K$ und $L = K(\alpha)$.

Welche Aussage liefert die Verallgemeinerung des Arguments für eine Erweiterung $K(\alpha)/K$ vom Grad n ? Welche Voraussetzungen braucht man hier?

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr am Montag, den 16.11.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.