

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

14.10.2014

Übung 1 (4 Punkte)

Sei p ein Primelement in einem Hauptidealring R und $a_1, \dots, a_n \in R$ Elemente. Man zeige, dass aus

$$p \mid a_1 \cdots a_n$$

folgt, dass $p \mid a_i$ für ein $1 \leq i \leq n$.

Übung 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Bestimmen Sie die primen Elemente in $K[[X]]$ bis auf Einheiten.

Übung 3 (4 Punkte)

Sind $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ zyklische Gruppen?

Übung 4 (4 Punkte)

Sei R ein Ring und $x, y, q, r \in R$ mit $x = qy + r$. Dann gilt

$$(qy + r, y) = (r, y).$$

Präsenzaufgabe *Die folgende Aufgabe ist zur eigenen Übung gedacht und wird nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5

Ein Ring R heiße noethersch, wenn jede Kette von Idealen $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ stationär wird, das heißt es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $I_{n+k} = I_n$ für alle $k \geq 0$.

- Zeigen Sie, dass diese Bedingung äquivalent dazu ist, dass alle Ideale in R endlich erzeugt sind.
- Zeigen Sie, dass jeder Hauptidealring noethersch ist.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 6

Seien a_1, \dots, a_n Elemente in einem Hauptidealring R . Zeigen Sie, dass das kgV von a_1, \dots, a_n das Produkt $a_1 \cdots a_n$ teilt.

Übung 7

Sei K ein Körper über dem jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad $\deg(f) > 0$ eine Nullstelle hat (ein algebraisch abgeschlossener Körper). Man zeige, dass jedes irreduzible Polynom in $K[X]$ linear, also vom Grad 1, ist.

Übung 8

Sei R ein Integritätsring und $a \in R$. Zeigen Sie, dass a irreduzibel ist genau dann, wenn (a) maximal bezüglich Inklusion unter den echten Hauptidealen ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr am Montag, den 09.11.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.