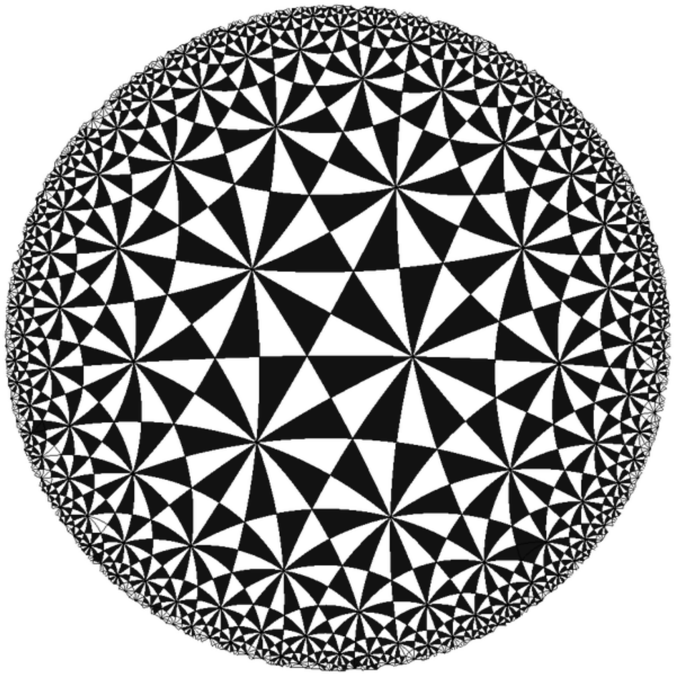
Skript zur Vorlesung

Funktionentheorie und Differentialgleichungen (2std.)



Wintersemester 2012/13
Frankfurt am Main

Prof. Dr. Martin Möller

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript[1] zu einer Vorlesung im WS 2012/13 in Frankfurt/Main kombiniert zwei Teilgebiete der Analysis, die eigentlich nur lose zusammenhängen. Das Literaturangebot zu beiden Themen ist umfangreich. Die Abschnitte zur Funktionentheorie sind aus

- Remmert, Schumacher: Funktionentheorie 1 (Springer)
- Conway: Functions in one complex variable (Springer)
- Freitag, Busam: Funktionentheorie 1 (Springer)
- Ahlfors: Complex Analysis (McGraw-Hill)

entstanden. Die Abschnitte zu Differentialgleichungen aus

- *wird ergänzt.*

Dies ist die erste Version des Skripts, Hinweise zu Fehlern und Verbesserungsvorschläge sind gerne gesehen.

1 Einleitung

Die komplexen Zahlen sind entstanden auf der Suche nach einem Körper über dem jedes Polynom in einer Variablen eine Nullstelle besitzt. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben. Viele in der Natur (Physik,...) auftretenden Funktionen hängen von einer komplexen Zahl z ab, also von zwei reellen Parametern x und y. Was also ist der Unterschied zwischen Funktionentheorie, dem Studium von Funktionen in einer (oder mehreren) komplexen Zahlen und der Analysis auf $\mathbb{R}^2$?
Bereits in der Analysis I haben Sie Funktionen von $x \in \mathbb{R}$ kennengelernt, die unendlich oft differenzierbar sind, aber deren Taylorreihe nichts mit der Funktion gemeinsam hat, z.B.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für} \quad x \neq 0. \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

[1] Titelbild: http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Tessellations_of_the_hyperbolic_plane

Ähnliche Beispiele kann man auch für Funktionen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ konstruieren. Außerdem haben Sie Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ kennengelernt, die differentierbar, aber nicht zweimal differentierbar sind und mit wenig mehr Mühe bastelt man Funktionen, die sieben Mal, aber nicht acht Mal differentierbar sind.
Alle diese Merkwürdigkeiten verschwinden auf einen Schlag, wenn man annimmt, dass $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, auch holomorph genannt ist. Der Beweis dieser Aussage und die wichtigsten Konsequenzen hieraus sind Gegenstand des Abschnitts Funktionentheorie.

(Einleitung zu DGL folgt)

2 Grundbegriffe

Wir fassen hier einige Begriffe zusammen, die aus der Analysis bekannt sein sollten.

2.1 Die komplexen Zahlen

Sei $\mathbb{C} = \{(x,y),\ x,y \in \mathbb{R}\}$ die Menge der *komplexen Zahlen* mit der Multiplikation

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$$

und komponentenweiser Addition. Wir schreiben diese Paare ab sofort $x+iy$ und obige Multiplikation ist äquivalent zu Rechenregel $i^2 = -1$. Zu $z = x+iy$ heißt $\overline{z} = x - iy$ die *komplex konjugierte Zahl* und $|z| = \sqrt{z\overline{z}} \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* von z. Die komplexen Zahlen bilden einen Körper, denn das Inverse von $z = x+iy$ ist $z^{-1} = \frac{x}{|z|^2} - i\frac{y}{|z|^2}$. Die Abbildung $x \longmapsto x + i\cdot 0$ definiert eine Einbettung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist.
Ist $z = x+iy$, so heißt $x = \mathrm{Re}(z)$ der *Realteil* und $y = \mathrm{Im}(z)$ der *Imaginärteil* von z.
Der komplexe Betrag definiert vermöge

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$$

einen Abstandsbegriff (Metrik) auf $\mathbb{C}$, aber $\mathbb{C}$ besitzt keine Anordnung, d.h. es gibt keine Relation „$<$“ , die sinnvoll, d.h. verträglich mit der Multiplikation ist.

2.2 Etwas Topologie

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls es $R > 0$ gibt mit $|z| \leq R$ für alle $z \in M$. Mithilfe des Abstandsbegriffs definiert man offene und abgeschlossene Mengen. Da für $z = x + iy$ gilt $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ stimmen diese Begriffe alle mit den von $\mathbb{R}^2$ gewohnten Begriffen überein.
Ein *Weg* $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung des Intervalls $[a, b]$ nach $\mathbb{C}$. Man spricht von einem Weg *von* $\gamma(a)$ *nach* $\gamma(b)$. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ *geschlossen*. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in M$ einen Weg von z_1 nach z_2 gibt. Eine Menge M heißt *zusammenhängend*, falls aus einer Überdeckung von M durch disjunkte offene Mengen $M \subseteq M_1 \dot{\cup} M_2$ (d.h. $M \subseteq M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2 = \emptyset$) folgt $M_1 = \emptyset$ oder $M_2 = \emptyset$.
Für $\mathbb{C}$ ist ein *Gebiet*, d.h. eine offene Menge, zusammenhängend genau dann, wenn sie wegzusammenhängend ist (Übung!).

3 Komplexe Differenzierbarkeit

3.1 Differenzierbarkeit in einem Punkt

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir erinnern zunächst an den entsprechenden Begriff aus der Analysis für $\mathbb{R}^2$. Eine Abbildung $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ heißt in z_0 *differenzierbar*, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - T(h)|}{|h|} = 0.$$

Die Betragsstriche bezeichnen dabei die 2-Norm auf $\mathbb{R}^2$. Die Abbildung T wird die Ableitung von f im Punkt z_0 genannt. Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist, mit der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ auch eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, aber nicht jede solche $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist auch $\mathbb{C}$-linear. Daraus wird klar, dass der folgende Begriff eine stärkere Bedingung als reelle Differenzierbarkeit ist. Man beachte, dass eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung durch eine einzige komplexe Zahl $T(1)$ eindeutig bestimmt ist.

Definition 3.1 *Eine Abbildung $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt* komplex differenzierbar in z_0, *falls es eine Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ gibt, sodass*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot h|}{|h|} = 0.$$

Die Abbildung f heißt holomorph in z_0, falls es eine Umgebung U von z_0 gibt und f komplex differenzierbar in z für alle $z \in U$ ist. Wir nennen $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, *falls für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ die Funktion f in z_0 holomorph ist. Wir schreiben auch $\frac{df}{dz}(z_0)$ für $f'(z_0)$.*
Man beachte, dass man im Bruch in der Definition der komplexen Differentierbarkeit die Betragsstriche statt im Zähler und Nenner auch um den gesamten Bruch schreiben kann.

Beispiele 3.2 i) Die Abbildung $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar, denn es folgt aus der Binomischen Formel, dass

$$(z_0+h)^n - z_0 = h \cdot n \cdot z_0^{n-1} + h^2 \cdot \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \cdot z_0^{n-2} + \ldots + h^n$$

gilt. Also ist

$$f'(z_0) = n \cdot z_0^{n-1},$$

denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - n \cdot z_0^{n-1} \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h \cdot \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \cdot z_0^{n-2} + \ldots + h^{n-1} \right) = 0.$$

ii) Die Abbildung $f(z) = \overline{z}$ ist nirgends holomorph, denn $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$ und der Limes hiervon für $h \in \mathbb{R}, h \to 0$ ist 1, aber für $h \in i\mathbb{R}$ ist der Limes $h \to 0$ gleich -1.

Wir vergleichen die beiden Differenzierbarkeitsbegriffe, reell und komplex, noch genauer. Die lineare Abbildung T wird durch eine 2×2-Matrix gegeben. Schreiben wir $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der zwei Komponentenfunktion $f = (f_1, f_2)$, so ist T nach Definition der partiellen Ableitungen durch die Abbildungsmatrix (stets bzgl. der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in diesem Abschnitt)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

gegeben. Ganz allgemein gilt: Ist eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gegeben, so ist T auch $\mathbb{C}$ linear, genau dann, wenn

$$(\#)\; b + id = T(i) = iT(1) = i(a+ic) = -c + ia$$

gilt, also genau dann, wenn sie die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

hat. In unserem Differenzierbarkeitsproblem lauten also die Bedingungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Diese beiden partiellen Differentialgleichungen werden die *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen* genannt. Wir fassen zusammen, was wir soeben bewiesen haben.

Satz 3.3 *Für $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

i) Im Punkt $z_0 \in D$ ist f komplex differenzierbar.

ii) Im Punkt $z_0 \in D$ ist f reell differenzierbar und die Ableitung $f'(z_0)\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.

iii) Im Punkt $z_0 \in D$ ist f reell differenzierbar und die partiellen Ableitungen genügen den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

Beispiele 3.4 i) Die Abbildung $f(x+iy) = x^3y^2 + x^2y^3$ ist reell differenzierbar und hat die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + i2xy^3$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + i3x^2y^2$. Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen besagen, dass zur komplexen Differenzierbarkeit im Punkt (x_0, y_0) $3x_0^2y_0^2 = 3x_0^2y_0^2$ und $2x_0y_0^3 = -2x_0^3y_0$ gelten muss.

Dies ist offenbar genau dann erfüllt, wenn $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$ ist. In diesen Punkten ist f zwar komplex differenzierbar, aber f ist nirgends holomorph.

ii) Die Funktion $f(x+iy) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ ist reell differenzierbar und hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + ie^x \cos y$$

Die Cauchy-Riemann-Differenzialgleichungen sind also in jedem Punkt erfüllt. Wir werden diese Funktion, die komplexe Exponentialabbildung, noch in Abschnitt (...) ausdrücklich diskutieren.

3.2 Ableitungsregeln

Wir können die folgenden Ableitungsregeln wahlweise mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit unter Nachahmung des reell eindimensionalen Falles beweisen oder mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differenzialgleichungen aus dem reell zweidimensionalen Fall folgern.

Satz 3.5 *Seien $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in z_0. Dann sind $af + bg$ und fg für alle $a, b \in \mathbb{C}$ holomorph in z_0 und es gilt*

$$\begin{aligned}(af+bg)'(z_0) &= af'(z_0) + bg'(z_0)\\ (fg)'(z_0) &= (f'g)(z_0) + (fg')(z_0).\end{aligned}$$

Ist g nullstellenfrei, so ist f/g holomorph in (z_0) und es gilt

$$(f/g)'(z_0) = \left((f'g - fg')/(g^2)(z_0)\right).$$

Ist $f\colon D \longrightarrow D' \subseteq \mathbb{C}$ und $g\colon D' \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in $f(z_0)$ so ist $g \circ f$ holomorph in z_0 und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'\left(f(z_0)\right) \cdot f'(z_0).$$

Beweis : Exemplarisch beweisen wir die Kettenregel, die anderen Regeln verbleiben als Übung. Wir betrachten die Hilfsfunktion:

$$G\colon D_0' \longrightarrow \mathbb{C}, G(z) = \begin{cases} \frac{g(z)-g(f(z_0))}{z-f(z_0)} & , z \neq f(z_0)\\ g'\left(f(z_0)\right) & , z = f(z_0).\end{cases}$$

Diese ist stetig in $f(z_0)$, da g in $f(z_0)$ komplex differenzierbar ist. Ferner gilt für $z \in D_0' \setminus \{z_0\}$

$$\frac{g\left(f(z)\right) - g\left(f(z_0)\right)}{z - z_0} = G\left(f(z)\right) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

und $\lim\limits_{z\to z_0} G\left(f(z)\right) = G\left(f(z_0)\right) = g'\left(f(z_0)\right)$. Also steht im $\lim\limits_{z\to z_0}$ auf der rechten Seite der Gleichung gerade $g'\left(f(z_0)\right) \cdot f'(z_0)$, was zu zeigen war. □

3.3 Die partiellen Ableitungen nach z und $\overline{z}$

Wir schreiben die Ableitung einer reell differenzierbaren Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ noch einmal auf. Die Ableitung $f'(z_0)$ im Punkt $z_0 \in D$ ist eine lineare Funktion $T = T_{f,z_0}$ und es gilt

$$T(h) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \operatorname{Re} h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \operatorname{Im} h.$$

Wir definieren $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ so, dass die Gleichung

$$T(h) = \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \overline{h}$$

erfüllt ist. Nach Einsetzen von $\operatorname{Re} h = \frac{1}{2}(h + \overline{h})$ und $\operatorname{Im} h = \frac{1}{2i}(h - \overline{h})$, erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Satz 3.6 *Eine reell differenzierbare Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar in z_0, falls $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ ist.*

Beweis : Wir schreiben $f = f_1 + i f_2$. Dann ist $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ äquivalent zu

$$0 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) + i \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + i \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)$$

und wegen der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen ist dies äquivalent zur komplexen Differenzierbarkeit. □

4 Biholomorphe Abbildungen

Seien D_1 und D_2 Gebiete in $\mathbb{C}$. Eine holomorphe Abbildung $f\colon D_1 \longrightarrow D_2$ heißt *biholomorph*, wenn es eine holomorphe Umkehrabbildung $f^{-1}\colon D_2 \longrightarrow D_1$ gibt. Dieser Abschnitt gibt erste Aussagen, welche Gebiete in $\mathbb{C}$ hinsichtlich der Funktionentheorie gleich sind, wann es also eine biholomorphe Abbildung zwischen zwei Gebieten gibt. Es sei

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

die *obere Halbebene* und

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

die *(offene) Einheitskreisscheibe*. Die Abbildung

$$h_c(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

wird *Cayley-Transformation* genannt. Es gilt

Satz 4.1 *Die Cayley-Transformation definiert eine biholomorphe Abbildung $h_c\colon \mathbb{H} \longrightarrow \Delta$, deren Umkehrabbildung durch $h_c^{-1}\colon \Delta \longrightarrow \mathbb{H}$, $h_c^{-1}(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$ gegeben ist.*

Beweis : Die Mittelsenkrechte zur Strecke $[i,-i]$ ist die reelle Achse. Alle Punkte der oberen Halbebene liegen näher an i als an $-i$. Für $z\in\mathbb{H}$ ist folglich $|z-i|<|z-(-i)|$ und daher ist $|h_c(z)|<1$ für alle $z\in\mathbb{H}$. Dass die Abbildungen zueinander invers sind, rechnet man direkt nach. □

Die Cayley-Transformation ist nicht der einzige Biholomorphismus $\mathbb{H}\longrightarrow\Delta$. Allgemeiner ist die Verkettung von biholomorphen Abbildungen wieder biholomorph. Wir untersuchen also biholomorphe Selbstabbildungen von $\mathbb{H}$ und Δ. Sei

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{C})$$

und wir betrachten die Abbildungen

$$M_A(z)=\frac{a\cdot z+b}{c\cdot z+d}.$$

Man rechnet nach, dass für $A,B\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt (Übung!)

$$M_{A\cdot B}(z)=M_A\left(M_B(z)\right).$$

Offenbar stimmen für alle $\lambda\in\mathbb{C}$ die Abbildungen $M_{\lambda A}$ und M_A überein. Wir schreiben $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ für die Matrizen mit positiver reeller Determinante.

Satz 4.2 *Ist $A\in GL_2^+(\mathbb{R})$, so ist M_A ein Biholomorphismus von $\mathbb{H}$. Zu je zwei Punkten $z_1,z_2\in\mathbb{H}$ gibt es eine Matrix A mit $M_A(z_1)=z_2$.*

Beweis : Da A reell ist, gilt

$$\begin{aligned}2i\cdot\operatorname{Im}M_A(z)=M_A(z)-\overline{M_A(z)}&=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\\&=\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)-(a\overline{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2}\\&=\frac{ad-bc}{|cz+d|}(z-\overline{z}).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Im}M_A(z)=\frac{\det A}{|cz+d|}\operatorname{Im}(z)>0.$$

Die Umkehrabbildung von M_A ist $M_{A^{-1}}$ nach der obigen Verkettungsregel.
Für die letzte Aussage genügt es zu jedem z_2 eine Matrix $A\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ zu finden, mit $M_A(i)=z_2$. Der Ansatz $c=0$ und $d=a^{-1}$ liefert für $\begin{pmatrix}a&b\\0&a^{-1}\end{pmatrix}$

$$M_A(i)=\frac{a\cdot i+b}{a^{-1}}=b\cdot a^{-1}+i\cdot a^2\overset{!}{=}z=x+iy.$$

Diese Bedingung kann man offenbar für alle $z \in \mathbb{H}$, d.h. mit $y > 0$ lösen. $\square$

5 Potenzreihen

Wie in der reellen Analysis sind Potenzreihen neben Polynomen und gebrochen rationalen Funktionen die wichtigste Quelle für interessante Funktionen. Wir schreiben eine Potenzreihe (mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$) als

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n.$$

Der *Konvergenzradius* ist wie in der Analysis als

$$R = \sup\{t \geqslant 0 : |a_n| \cdot t^n \text{ ist beschränkt}\}$$

definiert.
Auf ihrem Konvergenzbereich $D = B_R(c)$ definiert die Potenzreihe eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$. Die Kriterien für absolute Konvergenz aus der Analysis (Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, Majorantenkriterium) gelten hier mit gleichem Beweis. Dabei ist, wo immer ein Betrag auftritt, der komplexe Betrag zu verwenden. Außerhalb der abgeschlossenen Konvergenzkreisscheibe divergiert die Potenzreihe, auf den Randpunkten der Konvergenzkreisscheibe ist „alles möglich".

Beispiele 5.1 i) Die Exponentialfunktion. Wir definieren die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Es ist $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$, also konvergiert die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{C}$.

ii) Die komplexen Trigonometrischen Funktionen.

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \sum_{n\geqslant 0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^4}{4!} - \tfrac{z^6}{6!} + - \dots \\
\sin(z) &= \sum_{n\geqslant 0} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} - \tfrac{z^7}{7!} + - \dots
\end{aligned}$$

konvergieren ebenfalls auf ganz $\mathbb{C}$ und es gilt (Übung!)

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

iii) Die Logarithmusreihe. Wir definieren

$$\lambda(z) = \sum_{n \geqslant 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \dots$$

Diese hat Konvergenzradius $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Wir vermeiden im Moment das Symbol $\log$. Natürlich stimmt für reelle positive z diese Funktion mit $\log(1+z)$ wie in der Analysis überein.

iv) Die hypergeometrischen Funktionen. Wir definieren zunächst eine Verallgemeinerung der Notation $n!$, das *Pochhammersymbol*, durch

$$(\alpha)_m = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m = 0 \\ \alpha(\alpha+1)\cdot \ldots \cdot (\alpha+m-1) & \text{für} \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die folgende Reihe mit 3 Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n} \cdot z^n$$

heißt *hypergeometrische Reihe*. Ihre Bedeutung erhält sie als Lösung einer Differenzialgleichung und durch die Kachelung der Einheitskreisscheibe auf dem Titelblatt. Der Konvergenzradius ist

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)} = 1.$$

Dies ist ein Beispiel für eine Reihe, die auf den Rand des Einheitskreises überall absolut konvergiert, falls $\mathrm{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ ist. Mit der unten erklärten $\mathcal{O}$-Notation gilt auf dem Rand $|z| = 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\tfrac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)}\right| = \left|\tfrac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}{\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right| \\
&= \left|\tfrac{1+\frac{\alpha+\beta}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{\gamma+1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right| \\
&= \left|\left(1+\tfrac{\alpha+\beta}{n}+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\tfrac{\gamma+1}{n}+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)\right| \\
&= \left|1-\tfrac{1+\gamma-\alpha+\beta}{n}+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right| \\
&= \sqrt{1-\tfrac{2+\gamma-\alpha+\beta+\overline{\gamma-\alpha+\beta}}{n}+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)} \\
&= 1-2\tfrac{1+\mathrm{Re}(\gamma-\alpha+\beta)}{n}+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also nach dem untenstehenden Lemma.

Eine kurze Einführung (oder Wiederholung?) der $\mathcal{O}$-Notation:
Sei $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir schreiben

$$f \in \mathcal{O}\left(n^k\right) \text{ für ein } k \in \mathbb{R}$$

falls es $C > 0$ und $N > 0$ gibt, sodass

$$|f(n)| \leqslant C \cdot n^k \text{ für alle } n \geqslant N.$$

Diese Notation ist bequem, denn ist $f, g \in \mathcal{O}(n^k)$, so sind $\alpha f + g, f \cdot g \in \mathcal{O}(n^k)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$. Außerdem haben wir oben verwendet, dass $\left(1 - \frac{a}{n} + f\right)^{-1} \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, falls $f \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (Übung!).

Lemma 5.2 *Die Reihe $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ konvergiert, falls es $C > 1$ und $\varepsilon > 0$ gibt, sodass*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \frac{C}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

Beweis : Die Reihe $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ mit $b_n = \frac{1}{n^s}$ und $1 < s \in \mathbb{R}$ konvergiert. Es ist

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} = 1 - \frac{s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Also ist für $1 < s < C$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

für n groß genug. Folglich gibt es ein M, sodass $\sum\limits_{n\geqslant 0} M \cdot b_n$ eine konvergente Majorante ist. □

5.1 Normale Konvergenz

Wir wollen einen Konvergenzbegriff für Reihen von Funktionen $\sum f_n$ mit $f_n\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ definieren, der leicht zu verifizieren ist und impliziert, dass wir sorglos rechnen können, also vertauschen können und als Limes von stetigen Funktionen wieder stetige Funktionen haben. Wir erinnern kurz an die Begriffe der Analysis.
Eine Funktionfolge $f_n\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergiert auf D_1 *gleichmäßig* gegen $f\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 = N_0(\varepsilon)$ gibt, sodass

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqslant N_0 \quad \text{und alle} \quad z \in D_1.$$

Dieser Konvergenzbegriff ist äquivalent zur Konvergenz in der Supremumsnorm auf D_1. Wir können ihn auf Reihen anwenden, indem wir ihn für die Folge der Partialsummen anwenden.
Summe bzw. Produkte gleichmäßig konvergenter Folgen von Funktionen konvergieren gegen die Summe bzw. das Produkt der Limesfunktionen. Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig. Diesen Satz aus der Analysis erhält man bereits unter der schwächeren Voraussetzung, dass die Folge stetiger Funktionen f_n *lokal gleichmäßig* gegen f konvergiert, d.h. dass jeder Punkt $z \in D_1$ eine Umgebung U_z besitzt, sodass f_n auf U gleichmäßig konvergiert.

Beispiel 5.3 Die Folge $f_n(z) = z^n : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ ist lokal gleichmäßig, aber nicht gleichmäßig konvergent.

Definition 5.4 *Eine Reihe* $\sum f_n$ *von Funktionen* $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *heißt* normal konvergent, *falls jeder Punkt* $z \in D$ *eine Umgebung* U *besitzt, sodass* $\sum \sup\limits_{z \in U} |f_n(z)| < \infty$.

Proposition 5.5 *Ist die Reihe* $\sum f_n$ *normal konvergent, so konvergiert* $\sum f_n$ *lokal gleichmäßig.*

Insbesondere ist in diesem Fall $f = \sum f_n$ stetig, falls alle f_n stetig sind. Der Beweis der Proposition ist genau die Aussage des (Weierstraßschen) Majorantenkriteriums aus der Analysis.

Proposition 5.6 *Konvergiert die Reihe* $\sum f_n$ *auf* D *normal gegen* f*, so konvergiert für jede Umordnung, d.h. jede Bijektion* $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *die umgeordnete Reihe* $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_{\tau(n)}$ *auf* D *normal gegen* f*.*

Beweis : Das Majorantenkriterium aus der Analysis besagt, dass für jedes $z \in D$ die Reihe $\sum f_n(z)$ absolut konvergiert und daher jede Umordnung gegen den gleichen Grenzwert konvergiert. $\square$

5.2 Holomorphie von Potenzreihen

Zunächst bestimmen wir den Konvergenzradius der Potenzreihe, die durch gliedweise Differentation und Integration entsteht.

Lemma 5.7 *Hat* $P_1 = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ *den Konvergenzradius* R*, so haben auch die Reihen* $P_2 = \sum\limits_{n\geqslant 0} na_n(z-z_0)^n$ *und* $P_3 = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}a_n(z-z_0)^{n+1}$ *den Konvergenzradius* R*.*

Beweis : Der Konvergenzradius R' der Reihe P_2 ist

$$R' = \sup\{t \geqslant 0 : n\,|a_n|\,t^{n-1} \text{ ist beschränkt}\}.$$

Ist $n\,|a_n|\,t^{n-1}$ beschränkt, so auch $|a_n|\,t^n$ und damit ist $R' \leqslant R$. Für die umgekehrte Inklusion zeigen wir für jedes $r < R$, dass auch $r < R'$ gilt. Ist $r < s \leq R$, so ist $|a_n|\,s^n$ beschränkt und

$$n \cdot |a_n|\,r^{n-1} = \left(r^{-1} \cdot |a_n| \cdot s^n\right) \cdot (n \cdot q^n) \text{ mit } q = r \cdot s^{-1}.$$

Da $n \cdot q^n$ eine Nullfolge ist und der erste Faktor nach Voraussetzung beschränkt ist, ist auch die linke Seite beschränkt.
Die Potenzreihe P_2 entsteht aus P_1 durch gliedweise Differentation. Ebenso entsteht P_1 aus P_3 durch gliedweise Differentation. Also genügt der Beweis der ersten Aussage zum Beweis, dass auch P_3 den Konvergenzradius R hat. □

Wir können nun zeigen, dass Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich holomorph sind. Mehr noch:

Satz 5.8 *Die Potenzreihe* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ *habe den Konvergenzradius* $R > 0$*. Dann ist ihre Grenzfunktion* $f\colon B_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ *unendlich oft komplex differenzierbar in jedem Punkt von* $B_R(z_0)$ *und es gilt für* $k \in \mathbb{N}$*:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geqslant k} k! \binom{n}{k} a_n(z-z_0)^{n-k} \textit{ für } z \in B_R(z_0)$$

Insbesondere ist f *holomorph in* z_0*.*

Beweis : Wir behandeln zunächst den Fall $k = 1$. Nach dem vorigen Lemma ist klar, dass $g(z) = \sum\limits_{n\geqslant 1} n \cdot a_n \cdot (z-z_0)^{n-1}$ eine Funktion $g\colon B_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert. Wir wollen zeigen, dass $f'(z) = g(z)$ gilt. Ist $h(z) = z - z_0$, so ist $(f \circ h)(z) = f'(h(z))$ und daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $z_0 = 0$ ist. Um die Behauptung im Punkt $z_1 \in B_R(z_0)$ zu zeigen, sei für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$

$$q_n(z) = z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \ldots + z^{n-j}z_1^{j-1} + \ldots + z_1^{n-1}.$$

Dann ist $z^n - z_1^n = (z - z_1)q_n(z)$, also gilt

$$f(z) - f(z_1) = \sum_{n \geqslant 1} a_n(z^n - z_1^n) = (z - z_1) \sum_{n \geqslant 1} a_n q_n(z).$$

Wir definieren $f_1(z) = \sum\limits_{n \geqslant 1} a_n q_n(z)$. Dann ist

$$f_1(z_1) = \sum_{n \geqslant 1} a_n \cdot n \cdot z_1^{n-1} = g(z_1).$$

Sobald wir wissen, dass f_1 in z_1 stetig ist, folgt

$$\lim_{z \to z_1} \frac{f(z) - f(z_1) - (z - z_1)f_1(z_1)}{(z - z_1)} = \lim_{z \to z_1} \frac{(z - z_1)f_1(z) - (z - z_1)f_1(z_1)}{z - z_1} = 0.$$

Um dies zu zeigen, müssen wir prüfen, dass $\sum a_n q_n(z)$ normal in $B_R(0)$ konvergiert. Jeder Punkt in $B_R(0)$ liegt in einer Kreisscheibe B_r mit $|z_1| < r < R$ und dort gilt $\sup\limits_{z \in B_r} |a_n q_n(z)| \leqslant |a_n| \, n \cdot r^{n-1}$, also aufsummiert

$$\sum_{n \geqslant 1} \sup_{z \in B_r} |a_n q_n(z)| \leq \sum_{n \geqslant 1} n \, |a_n| \, r^{r-1} < \infty$$

nach Lemma 5.7.

Für $k > 1$ ist nur induktiv zu zeigen, dass $\sum\limits_{n \geqslant k} k! \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a_n(z - z_0)^{n-k}$ die k-te Ableitung von $\sum a_n(z - z_0)^{n-k}$ ist und das ist eine leichte Rechnung. $\square$

5.3 Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp(z)$ hat die herausragende Eigenschaft $\exp'(z) = \exp(z)$, wie man aus vorigen Satz und der definierenden Potenzreihe sieht. Daraus leiten wir alle weiteren Eigenschaften in einer Serie von Lemmata ab.

Lemma 5.9 *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt* $\exp(z) \neq 0$

Beweis : Sei $h(z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$. Dann gilt $h'(z) = h - h = 0$ und wegen $f(0) = 1$, also $h(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Lemma 5.10 *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$$

Beweis : Es gilt

$$p_m := \sum_{n_1+n_2=m} \frac{1}{n_1!} z_1^{n_1} \cdot \frac{1}{n_2!} z_2^{n_2} = \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} z_1^{m-n} z_2^{n} = \frac{1}{m!}(z_1 + z_2)^m$$

und damit folgt

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^m}{m!} = \exp(z_1 + z_2)$$

$\square$

Anders gesagt ist $\exp\colon (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^* \setminus \{0\}, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus. Es gilt

$$\exp(\lambda(z)) = 1 + z,$$

denn die Ableitung von $f(z) = (1 + z)\exp(-\lambda(z))$ ist $f'(z) = \exp(-\lambda(z))(1 - (1 + z)\lambda'(z)) = 0$. [1] Also ist f konstant und außerdem ist $f(0) = 1$. Dies verwenden wir für den folgenden Satz.

Satz 5.11 *Die Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ist surjektiv.*

Beweis : Zunächst zeigen wir, dass das Bild von $\exp$ offen ist. Da $\lambda(z)$ den Konvergenzradius 1 hat, folgt aus der vorangestellten Formel, dass $B_1(1) \subseteq \exp(\mathbb{C})$. Es gilt $a \cdot B_1(1) = B_{|a|}(a)$. Außerdem ist für $a \in \exp(\mathbb{C})$ auch $a \cdot \exp(\mathbb{C}) = \exp(\mathbb{C})$. Zusammen liefert das $B_{|a|}(a) = a \cdot B_1(1) \subseteq a\exp(\mathbb{C}) = \exp(\mathbb{C})$ für alle $a \in \exp(\mathbb{C})$. Damit haben wir gezeigt, dass das Bild von $\exp(\mathbb{C})$ um jeden Punkt eine Kreisscheibe enthält, die wieder im Bild liegt.
Sei nun $A = \exp(\mathbb{C}), B = \mathbb{C}^* \setminus A$. Da A offen ist, ist $b \cdot A$ offen für alle $b \in \mathbb{C}^*$, insbesondere für alle $b \in B$. Also ist auch $\bigcup_{b \in B} bA$ offen in $\mathbb{C}^*$. Da A eine Untergruppe ist, ist $bA \subseteq B$. Also ist $B = \bigcup_{b \in B} bA$ offen. Da $\mathbb{C}^* = A \cup B$ zusammenhängend ist und A nicht leer, muß B leer sein. $\square$

[1] Dies sieht man mit einem einfachen Teleskopsummenargument.

Satz 5.12 *Es gibt genau eine positive reelle Zahl, genannt π, sodass*

$$\mathrm{Kern}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Beweis : Zunächst ist $\mathrm{Kern}(\exp)$ nicht leer, denn es gibt ein $a \neq 0$ mit $\exp(a) = -1$ und daraus folgt, dass $2a \neq 0$ die Eigenschaft $\exp(2a) = (-1)^2 = 1$ hat. Durch Vergleich der definierenden Potenzreihen und aufgrund der Multiplikativität von $\exp$ erhalten wir die nützliche Formel für $z = x + iy$.

$$\exp(z) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y).$$

Hieraus folgt auch

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z) \cdot \exp(\overline{z}) = \exp(z + \overline{z}) = \exp(2 \operatorname{Re} z) = \exp\left((\operatorname{Re}(z)\right)^2$$

und damit $|\exp(z)| = 1$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}(z) = 0$, also $z \in \mathbb{R} \cdot i$ liegt. Dies zeigt, dass $\mathrm{Kern}(\exp) \subseteq i \cdot \mathbb{R}$. Schließlich behaupten wir, dass es eine Umgebung U von Null gibt mit $U \cap \mathrm{Kern}(\exp) = \{0\}$. Andernfalls gäbe es eine Nullfolge $z_n \neq 0$ mit $\exp(z_n) = 1$. Aus

$$1 = \exp(0) = \exp'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(z_n) - \exp(0)}{z_n} = 0$$

erhalten wir den gewünschten Widerspruch. Also gibt es eine kleinste positive reelle Zahl π mit $2\pi i \in \mathrm{Ker}(\exp)$. Wir müssen noch zeigen, dass alle Elemente im Kern ganzzahlige Vielfache hiervon sind. Ist $r \cdot i \in \mathrm{Kern}(\exp)$, so gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $2\pi \cdot n \leq r < 2\pi \cdot (n+1)$. Da $ri - 2n\pi i \in \mathrm{Kern}(\exp)$ und $0 \leqslant r - 2n\pi < 2\pi$, muss $r = 2n\pi$ sein, damit die Minimalität in der Wahl von π nicht verletzt ist. Dies zeigt die letzte verbliebene Behauptung. $\square$

6 Wegintegrale

Für eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert auf einen Intervall $I = [a, b]$ definieren wir das Integral

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} f)(t)dt$$

ganz analog wie für Funktionen $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Wie in der Analysis gelten daher Linearität, Monotonie und Betragsabschätzung. Eine Funktion $F\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt

Stammfunktion von f, falls $F' = f$ (reelle Differenzierbarkeit) gilt. Der Fundamentalsatz der Integralrechnung, Substitutionsregel und partielle Integration übertragen sich wörtlich aus der reellen Analysis.

Für $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $\int f(z)dz$ nicht erklärt, wie auch für $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ das Integral $\int f(x,y)dxdy$ nicht definiert ist. Ist jedoch $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ ein differenzierbarer Weg, so erklären wir

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma f(z)dz := \int_\gamma f\Big(\gamma(t)\Big)\gamma'(t)dt.$$

Aus der Substitutionsregel folgt, dass dieses Integral unabhängig von Umparametrisierung des Weges γ ist. Sind $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, so ist

$$\gamma\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{C} = \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b,c] \end{cases}$$

ein Weg, die *Verkettung* $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ von γ_1 und γ_2. (Wir verwenden die Konvention der Verkettung von Abbildungen und schreiben den Weg, der als erstes in der Verkettung durchlaufen wird, als hinteres Argument von $\circ$.)

Auch wenn γ_1 und γ_2 stetig differenzierbar sind, so ist γ dies im Punkt b nicht. Um dieses Problem zu beheben, erweitern wir die Definition des Wegintegrals. Ein Weg $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, falls es Zwischenpunkte $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_n = b$ gibt, sodass $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ stetig differenzierbar ist für alle $i = 1, \ldots, n$. In diesem Fall differenzieren wir das *Wegintegral* von $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ längs γ als

$$\int\limits_\gamma f dz = \sum_{i=1}^n \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f\Big(\gamma(t)\Big)\gamma'(t)dt.$$

Wir vereinbaren, dass ab sofort ein Weg γ, wenn er im Symbol $\int\limits_\gamma f dz$ auftaucht, automatisch stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Wie in der Analysis zeigt man, dass obige Definition des Wegintegrals nicht von der Wahl der Zwischenpunkte $a_2, \ldots, a_{n-1}$ abhängt, indem man zu einer geeigneten Verfeinerung übergeht.

6.1 Unabhängigkeit von Weg und Parametrisierung

Hängt das Wegintegral $\int\limits_\gamma f dz$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab? Es kommt auf f an und im Allgemeinen lautet die Antwort nein, wie folgendes Lemma zeigt. Es ist die zentrale Beobachtung der Funktionentheorie.

Lemma 6.1 *Sei $\gamma = c + r \cdot e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ der Weg längs des Randes ∂B_r der Kreisscheibe $B = B_r(c)$, umlaufen gegen den Uhrzeigersinn. Dann gilt für $n \in \mathbb{Z}$*

$$\int\limits_{\partial B} (z-c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Im Folgenden sei der Rand einer Kreisscheibe immer durch einen solchen Weg entgegen dem Uhrzeigersinn parametrisiert, falls nicht explizit anders angegeben. **Beweis :** Es ist $\gamma'(t) = i \cdot r \cdot e^{it}$, also

$$\int\limits_{\partial B} (z-c)^n dz = \int\limits_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt = r^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t} dt.$$

Für $n \neq -1$ ist $\frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t}$ eine Stammfunktion des Integranten und daher das Integral gleich null. Für $n = -1$ ist der Integrand konstant und das Ergebnis folgt unmittelbar. □

Die obige Bemerkung über die Weg(un)abhängigkeit folgt hieraus, wenn man den Rand von $B_r(c)$ zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten links- oder rechtsherum durchläuft. Für $n = -1$ hängt das Ergebnis in der Tat vom Weg ab.

Anders verhält es sich, wenn man einen gegebenen Weg langsamer oder schneller durchläuft, den Weg umparametrisiert. Dies ist die erste einer Reihe von Eigenschaften von Wegintegralen, die wir aus der Analysis zusammenfassen.

Definition 6.2 *Zwei Wege $\gamma_1 : I_1 = [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : I_2 = [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ heißen äquivalent, falls es eine stetig differenzierbare Bijektion $\varphi : I_1 \longrightarrow I_2$ gibt mit $\varphi(a_1) = a_2$ und $\varphi(b_1) = b_2$ und $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$.*

Proposition 6.3 *Sind γ_1 und γ_2 äquivalent, so ist $\int\limits_{\gamma_1} f dz = \int\limits_{\gamma_2} f dz$.*

Beweis : Dies folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel. Ist $I_K = [a_K, b_K]$, so gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma_2} f dz &= \int\limits_{a_2}^{b_2} f\Big(\gamma_2(t)\Big)\gamma_2'(t)dt = \int\limits_{a_1}^{b_1} f\Big(\gamma_1(\varphi(t))\Big)(\gamma_1 \circ \varphi)'(t)dt \\ &= \int\limits_{a_1}^{b_1} f\Big(\gamma_1(\varphi(t))\Big)\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int\limits_{a_1}^{b_1} f\Big(\gamma_1(s))\Big)\gamma'(s)ds = \int\limits_{\gamma_1} f dz. \end{aligned}$$

□

Komplexe Wegintegrale sind linear im Argument f, ist $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ die Verkettung zweier Wege, so gilt nach Definition

$$\int_\gamma f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

Eine grobe Abschätzung für Wegintegrale ist durch

$$|\int_\gamma f dz| \leq |f|_\gamma L(\gamma), \text{ wobei } |f|_\gamma = \max_{t\in[a,b]} |f\Big(\gamma(t)\Big)|,$$

gegeben. Dabei ist $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ die Länge des Weges. Dies folgt aus der Abschätzung

$$|\int_\gamma f(dz)| = |\int_a^b f\Big(\gamma(z)\Big)\gamma'(t)dt| \leq \int_a^b |f\Big(\gamma(t)\Big)| \cdot |\gamma'(t)| dt,$$

für stetig differenzierbare Wege und im Allgemeinen durch Zerlegung des Weges in seine stetig differenzierbaren Teilwege.

Ist $f_n \colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge, die auf einem Gebiet $D \supseteq \gamma([a,b])$ gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - f|_\gamma = 0$. Als Konsequenz hiervon und der obigen Abschätzung erhalten wir:

Proposition 6.4 *Falls $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig konvergiert, so kann man Limes und Wegintegral vertauschen, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma (\lim_{n\to\infty} f_n) dz$$

6.2 Stammfunktionen

Wir nennen $F \colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $f \colon D \longrightarrow \mathbb{C}$, falls sie den äquivalenten Eigenschaften der folgenden Proposition genügt.

Proposition 6.5 *Sei $f \colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $F \colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

i) F ist holomorph in D und es gilt $F' = f$.

ii) Für jeden Weg in D mit Anfangspunkt $x = \gamma(a)$ und Endpunkt $y = \gamma(b)$ gilt $\int\limits_\gamma f dz = F(y) - F(x)$.

Beweis : Sei i) vorausgesetzt. Wenn wir ii) für einen stetig differenzierbaren Weg gezeigt haben, folgt der allgemeine Fall offensichtlich durch Addition der Beiträge der Teilstücke des Wegs. Ist γ stetig differenzierbar, so ist diese Implikation Folge des Hauptsatzes. Hauptaussage der Proportion ist also die Umkehrung. Sei dazu $z_0 \in D$ beliebig und $\overline{B} \subset D$ eine Kreisscheibe um z_0. Nach Voraussetzung ist

$$F(z) = F(z_0) + \int\limits_{[z_0,z]} f d\zeta \quad \text{für alle } z \in B.$$

Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$F_1(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int\limits_{[z_0,z]} f d\zeta \text{ für } z \in B \backslash \{z_0\}$$

und wollen zeigen, dass er sich durch $F_1(z_0) = f(z_0)$ stetig fortsetzen lässt. Wegen $\int d\zeta = z - z_0$ gilt

$$\left| F_1(z) - F_2(z_0) \right| = \frac{1}{|z - z_0|} \int\limits_{[z-z_0]} \Big(f(\zeta) - f(z_0) \Big) d\zeta \Big| \leq \frac{1}{|z - z_0|} \sup_{x \in [z_0,z]}$$

$$|f(x) - f(z_0)| \cdot |z - z_0| \leq \sup_{x \in \overline{B}} |f(x) - f(z_0)|.$$

Wir können nun die Kreisscheibe um z_0 kleiner und kleiner wählen und dann folgt die Stetigkeit von F_1 aus der Stetigkeit von f. □

Für viele Funktionen lassen sich Stammfunktionen direkt angeben, z.B. ist für $n \geq 0$ die Stammfunktion von $f(z) = z^n$ auf $D = \mathbb{C}$ die Funktion $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$. Daraus folgt auch, dass konvergente Potenzreihen stets eine Stammfunktion besitzen, die wir durch gliedweise Integration erhalten. Wir sagen, dass f auf D *integrierbar* ist, falls f eine Stammfunktion F besitzt, und suche nach Kriterien hierfür.

Proposition 6.6 *Ist f auf D stetig, so ist f integrierbar genau dann, wenn für jeden geschlossenen Weg γ gilt $\int\limits_\gamma f dz = 0$.*

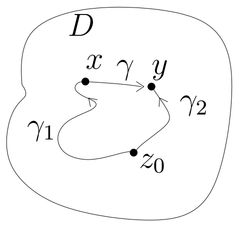
In diesem Fall erhält man eine Stammfunktion, indem man irgendeinen Punkt $z_0 \in D$ wählt und F definiert durch

$$F(z) = \int\limits_\gamma f dz,$$

wobei γ irgendein Weg von z_0 nach z ist.

Beweis : Die eine Implikation folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz. Für die andere zeigen wir, dass das angegebene F in der Tat eine Stammfunktion ist, indem wir das Kriterium der vorigen Proposition anwenden. Sei γ ein Weg von x nach y. Wir wählen Wege γ_1 von z_0 nach x und γ_2 von z_0 nach y. Dann ist $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma$ ein geschlossener Weg. Also

$$0 = \int_\gamma f dz - \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\gamma_1} f dz = \int_\gamma f dz - F(y) + F(x),$$



was zu zeigen war. □

Eine Eigenschaft „für jeden Weg“ zu prüfen, ist für eine abstrakt gegebene Funktion immer noch unpraktisch. Wir wollen ein konkreteres Kriterium.

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, falls es ein $z_1 \in M$ gibt, sodass zu jedem $z \in \mathbb{C}$ auch die gesamte Strecke $[z_1, z]$ in M liegt. Wir nennen z_1 auch das *Zentrum* von M.

Eine konvexe Menge ist sternförmig und jeder Punkt in einer konvexen Menge kann als z_1 gewählt werden. Insbesondere sind Kreisscheiben sternförmig. Die punktierte Ebene $\mathbb{C}^*$ ist nicht sternförmig.

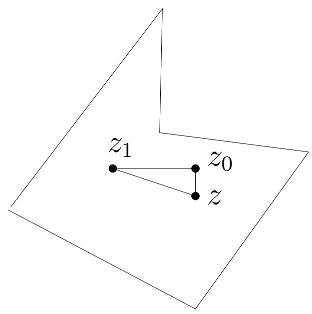
Satz 6.7 *Sei D sternförmig mit Zentrum z_1. Sei f stetig auf D und für den Rand $\partial\triangle$ jedes Dreiecks $\triangle$, das z_1 als Eckpunkt hat, gelte $\int_{\partial\triangle} f dz = 0$. Dann ist f integrierbar und*

$$F(z) = \int_{[z_1, z]} f dz$$

eine Stammfunktion.

Beweis : Wir betrachten nochmals den Beweis der Implikation $ii) \Rightarrow i)$ der Proposition 6.5. Wir haben dort Holomorphie von F und $F' = f$ nachgewiesen, indem wir für z_0 nahe beim Untersuchungspunkt z_0 die Stetigkeit der Differenzquotientenfunktion F_1 gezeigt haben. In dieser Situation liegt das Dreieck $\triangle(z_1, z_0, z)$ ganz in D und die Voraussetzung besagt

$$F(z) - F(z_0) = \int\limits_{[z_0,z]} f d\zeta.$$



Nur diese Gleichung und die Stetigkeit von f haben wir in obigem Beweis verwendet. □

7 Der Cauchysche Integralsatz

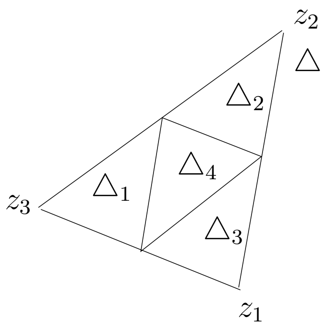
7.1 Das Goursat-Lemma und der Cauchy-Integralsatz

Das folgende Lemma besagt, dass für holomorphe Funktion die Voraussetzung des Integrabilitätskriteriums aus dem vorigen Abschnitt erfüllt ist. Man beachte, dass wir im Goursat-Lemma nicht voraussetzen, dass f' stetig ist. Mit dieser Voraussetzung folgt das Lemma leicht aus dem Satz von Stokes aus der reellen Analysis.

Lemma 7.1 *(Goursat) Sei f holomorph auf D. Dann gilt für jedes Dreieck $\triangle \subseteq D$*

$$\int\limits_{\partial\triangle} f dz = 0.$$

Beweis : Wir unterteilen das Dreieck $\triangle$ in 4 kongruente Teildreiecke, wovon $\triangle_4$ das mittlere ist und als Eckpunkte die Seitenmitten von $\triangle$ hat.



Dann ist nach der Dreiecksungleichung offenbar

$$\max_{w,z\in\triangle}|w-z| \leq L(\partial\triangle) \text{ und } L(\partial\triangle_i) = \frac{1}{2}L(\partial\triangle)$$

für $i = 1, 2, 3, 4$.

Wir schreiben abkürzend $a(\triangle) = \int\limits_{\partial\triangle} f dz$, wobei wir den Rand immer gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wollen. Damit gilt

$$a(\triangle) = \sum_{j=1}^{4} a(\triangle_j),$$

denn die Wege im Inneren von $\triangle$ werden bei der Summe auf der rechten Seite zweimal und in verschiedener Orientierung durchlaufen. Wir wählen unter den 4 Teildreiecken von $\triangle$ dasjenige aus, in dem $|a(\triangle_j)|$ maximal ist und nennen es $\triangle^1$. Also ist $|a(\triangle)| \leq 4|a(\triangle^1)|$. Wir unterteilen $\triangle^1$ wieder, bezeichnen das Teildreieck mit maximalem $|a(\triangle^1_j)|$ mit $\triangle^2$ und so weiter. Man erhält also eine Folge von Dreiecken $\triangle^j$ mit $|a(\triangle)| \leq 4^n|a(\triangle^n)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $z_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \triangle^n$. Da f holomorph ist, gibt es eine stetige Funktion $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(0) = 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)g(z).$$

Da konstante und lineare Funktionen Stammfunktionen besitzen, ist

$$\int\limits_{\partial\triangle^n} f(z_0)dz = 0 \text{ und } \int\limits_{\partial\triangle^n} f'(z_0)(z - z_0)dz = 0 \text{ für alle } n \geq 1.$$

Also ist

$$a(\triangle^n) = \int\limits_{\partial\triangle^n} (z - z_0)g(z)dz.$$

Aus der Anfangsbemerkung folgt $L(\partial\triangle^n) = \frac{1}{2^n}L(\partial\triangle)$ für alle $n \geq 1$ und aus der Standardabschätzung für Integrale

$$\begin{aligned} |a(\triangle)| &\leq 4^n|a(\triangle^n)| \leq 4^n L(\partial\triangle^n)L(\partial\triangle^n) \cdot \sup_{z\in\partial\triangle^n} |g(z)| \\ &\leq L(\partial\triangle)^2 \cdot \sup_{z\in\partial\triangle^n} |g(z)|. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von g und $g(z_0) = 0$ impliziert, dass es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $\sup\limits_{z\in B_\delta(z_0)} |g(z)| < \varepsilon$. Wegen $z_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \triangle^n$ gibt es ein N_0, sodass $\triangle^n \in B_\delta(z_0)$ für alle $n \geq N_0$. Also ist für diese $n \geq N_0$

$$|a(\triangle)| \leq L(\triangle)^2 \cdot \varepsilon.$$

Da $L(\triangle)$ fest, aber ε beliebig wählbar ist, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 7.2 *(Cauchy) Sei G sternförmig mit Zentrum z_0 und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f integrierbar auf G und die Funktion*

$$F(z) = \int\limits_{[z_0,z]} f d\zeta$$

ist eine Stammfunktion.

Beweis : Dies ist nun nicht mehr als die Aussagen des Goursat-Lemmas und des Integrabilitätskriteriums Satz 6.7 zusammengenommen. $\square$

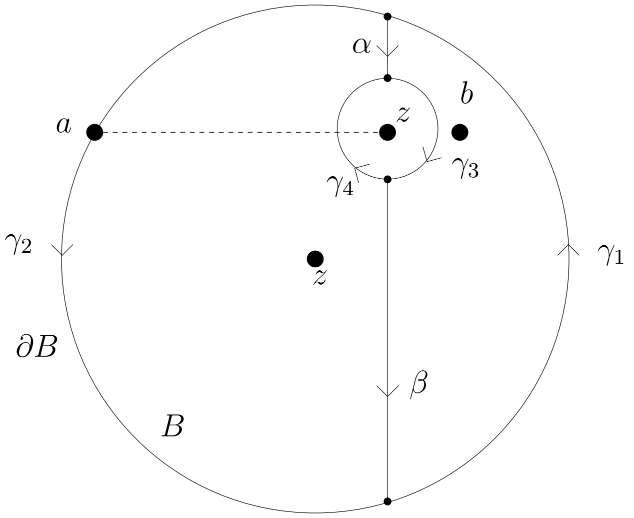
7.2 Die Cauchy-Integralformel

Die Integrale der Potenzreihenterme $(z-z_0)^n$ entlang des Randes einer Kreisscheibe mit Zentrum z_0 haben wir für alle n in Lemma 6.1 einfach ausrechnen können. Ist $\gamma = \partial B_r(c) \subseteq D$ ein geschlossener Weg entlang des Randes einer Kreisscheibe, die nicht in z_0 zentriert ist, so ist die direkte Bestimmung des Integrals von $(z-z_0)^n$ für $n < 0$ nicht einfach. Folgendes Lemma hilft dank des Cauchy-Integralsatzes.

Lemma 7.3 *Sei $g : D\backslash\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $B = B_r(z)$ eine Scheibe mit $\overline{B} \subseteq D$ und z_0 im Inneren von B. Sei γ der Weg längs des Randes einer beliebigen Kreisscheibe in D, die in z_0 zentriert ist. Dann gilt*

$$\int\limits_{\partial B} gdz = \int\limits_{\gamma} gdz.$$

Beweis : Sei $B^* \supsetneqq B_r(z_0)$ eine etwas größere Scheibe mit $B^* \subseteq D$ und $a \in \partial B^*$ so, dass $B^* \backslash [a, z]$ ein Sterngebiet bezüglich $b \in B^*$ wie im folgenden Bild ist.



Dann ist $\partial B = \gamma_2 \circ \gamma_1$ und $\gamma = (\gamma_4 \circ \gamma_3)^{-1}$. Wir betrachten außerdem $\tau = \beta \circ \gamma_3 \circ \alpha \circ \gamma_1$ und $\tau' = \beta \circ \gamma_4^{-1} \circ \alpha \circ \gamma_2^{-1}$.

Da $B^* \backslash [a, z]$ ein Sterngebiet und g dort holomorph ist, folgt $\int\limits_\tau g dz = 0$. Mit dem spiegelsymmetrisch gleichen Argument folgt $\int\limits_{\tau'} g dz = 0$. Also ist

$$0 = \int\limits_\tau g dz - \int\limits_{\tau'} g dz = \int\limits_{\gamma_1} g dz + \int\limits_{\gamma_2} g dz + \int\limits_{\gamma_3} g dz + \int\limits_{\gamma_4} g dz$$

und daraus folgt unmittelbar die Behauptung. $\square$

Beispiel: Für eine Kreisscheibe B gilt nach obigem Lemma und Lemma 6.1

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad z_0 \in B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Korollar 7.4 *Ist g in einer Umgebung U von $z_0 \in B$ beschränkt, so ist $\int\limits_{\partial B} g dz = 0$.*

Beweis : Sei $M \geq \sup\limits_{z \in U} |g(z)|$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle den Weg γ als Rand einer Kreisscheibe vom Radius $r = \frac{\varepsilon}{2\pi M}$ um z_0. Dann gilt

$$\Big| \int\limits_{\partial B} g dz \Big| = \Big| \int\limits_\gamma g dz \Big| \leq M \cdot 2\pi \cdot r \leq \varepsilon.$$

Beliebiges Verkleinern von ε zeigt die Behauptung. □

Satz 7.5 *(Cauchy-Integralformel) Sei f holomorph auf D und $B = B_r(z_0)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B} \subseteq D$. Dann gilt für alle $z \in B$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Der Satz ist erstaunlich, da es genügt, f auf dem Rand einer Kreisscheibe zu kennen, um sämtliche Werte im Innern rekonstruieren zu können. Dies trifft für $C^\infty-$Funktionen überhaupt nicht zu und hiermit beginnen die wirklichen Unterschiede zwischen der Funktionentheorie und der reellen Analysis.

Beweis : Wir fixieren $z \in B$ und betrachten die Hilfsfunktion

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ für } \zeta \in D \backslash \{z\},$$

welche wir mit $f'(z)$ nach z stetig fortsetzen. g ist offenbar holomorph auf $D \backslash \{z\}$. Nach dem vorigen Korollar gilt

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{\partial B} g d\zeta &= \int\limits_{\partial B} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int\limits_{\partial B} \tfrac{1}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int\limits_{\partial B} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot 2\pi i. \end{aligned}$$

□

7.3 Entwicklung in Potenzreihen

Von einer Potenzreihe wissen wir bereits nach Satz 5.8, dass sie unendlich oft komplex differenzierbar ist. Wir zeigen nun, dass jede holomorphe Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar ist und daher analytisch.

Lemma 7.6 *Sei γ ein geschlossener Weg und $f \colon \mathrm{Bild}(\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann definieren wir auf $D = \mathbb{C} \backslash \mathrm{Bild}(\gamma)$*

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Die Funktion ist auf D holomorph. Ist $z_0 \in D$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

auf jeder Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset D$. Darüber hinaus ist $\widetilde{f}$ unendlich oft komplex differenzierbar und es gilt

$$\widetilde{f}^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \quad \textit{für alle } z \in D, k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis : Sei $B = B_r(z_0)$ fixiert. Die Reihe

$$\frac{1}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} w^{n-k} = \sum_{m \geq 0} \binom{m+k}{k} w^m$$

konvergiert auf der Einheitskreisscheibe, wie man mit dem Quotientenkriterium direkt nachprüft. Der Punkt $w = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$ liegt für $\zeta \in$ Bild (γ) in der Einheitskreisscheibe. Für diesen gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} &= \sum_{n \geq k} \tbinom{n}{k} \left(\tfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n-k} \cdot \tfrac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \\ &= \sum_{n \geq k} \tbinom{n}{k} \tfrac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

Wir schreiben kurz $g_n(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{n+1}$ für $\zeta \in$ Bild (γ). Dann ist

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n \geq k} k! \binom{n}{k} g_n(\zeta)(z - z_0)^{n-k} \cdot d\zeta.$$

Wir wollen zeigen, dass die Reihe unter dem Integral normal konvergiert. Da $|\zeta - z_0| > r$ für $\zeta \in$ Bild (γ) gilt mit der Notation $|k|_\gamma \colon = \sup\limits_{x \in \text{ bild}(\gamma)} k(x)$ die Abschätzung $|g_n|_\gamma \leq r^{-(n+1)} |f|_\gamma$. Also ist

$$\sup_{\zeta \in \text{ Bild}(\gamma)} |g_n(\zeta)(z - z_0)^{n-k}| \leq \frac{1}{r^{k+1}} |f|_\gamma \cdot q^{n-k}, \text{wobei } q = \frac{|z - z_0|}{r}.$$

Da $|q| < 1$ ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq k} k! \tbinom{n}{k} g_n(\zeta)(z - z_0)^{n-k} \right| &\leq \tfrac{k! |f|_\gamma}{r^{k+1}} \cdot \sum_{n \geq k} \tbinom{n}{k} q^{n-k} \\ &= \tfrac{k! |f|_\gamma}{r^{k+1}} \cdot \tfrac{1}{(1-q)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Wir können also Reihe und Integral vertauschen und erhalten mit a_k wie oben.

$$\frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n \geq k} k! \binom{n}{k} a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Für $k = 0$ besagt dies, dass obiges f durch eine auf B konvergente Potenzreihe dargestellt wird. Diese ist unendlich oft differenzierbar und ihre $k-$te Abbildung steht in der vorigen Formel rechts. $\square$

Ist f die Einschränkung einer holomorphen Funktion auf den gegebenen Weg γ, so ist $\widetilde{f}$ (wie oben definiert) gleich f nach der Cauchyschen Integralformel. Dies beweist folgenden Entwicklungssatz.

Satz 7.7 *Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$. Sei $B_r(z_0) \subseteq D$ eine Kreisscheibe um z_0. Dann ist f um z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar, d.h. mit*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

und $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $0 < \rho < r$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ auf $B_r(z_0)$ normal gegen f. Insbesondere ist f unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

8 Etwas Funktionentheorie in mehreren Variablen

Wir betrachten nun Funktionen $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$, wobei D ein Gebiet in $\mathbb{C}^n$ ist. Wieder können wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ auffassen und haben den Begriff reeller Differenzierbarkeit von $\operatorname{Im} f$ und $\operatorname{Re} f$ zur Verfügung. Wir nennen f reell differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ dies sind. In $\mathbb{C}^n$ verwenden wir Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n)$ und schreiben jeweils $z_j = x_j + i \cdot y_j$. Insbesondere können wir für reell differenzierbares f von den partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j} = (\operatorname{Re} f)_{x_j} + i(\operatorname{Im} f)_{x_j}$ und $\frac{\partial f}{\partial y_j} = f_{y_j} = (\operatorname{Re} f)_{y_j} + i(\operatorname{Im} f)_{y_j}$ und den Linearkombinationen $\frac{\partial f}{\partial z_j} = f_{z_j}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = f_{\overline{z}_j}$ sprechen. Für festgehaltenes $z_1, \ldots, z_n$ ist f als Funktion von z_1 holomorph genau dann, wenn $f_{\overline{z}_1} = 0$ ist. Wir nennen f holomorph, falls es diese Eigenschaft bezüglich jeder Koordinate besitzt.

Definition 8.1 *Die Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ für $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ist holomorph, falls sie reell differenzierbar ist und für $j = 1, \ldots n$ die partiellen Ableitungen $f_{\overline{z}_j}$ verschwinden.*

Man überlegt leicht mit Hilfe der Rechenregeln für partielle Ableitungen, dass alle naheliegenden Rechenregeln auch im Komplexen noch gelten. Beispielsweise die Kettenregel.

Proposition 8.2 *Ist $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und sind $h_1, \ldots, h_n\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist auf ihrem Definitionsbereich in $\mathbb{C}^n$ die Funktion $g = f(h_1(z_1), \ldots, h_n(z_n))$ holomorph und es gilt*

$$g_{z_j}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\partial f}{\partial z_j}\Big(h_1(z_1), \ldots, h_n(z_n)\Big) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial z_j}(z_j).$$

Ebenso ist die Funktion $v = f\Big(h_1(z), \ldots, h_n(z)\Big)$ auf ihrem Definitionsbereich in $\mathbb{C}$ holomorph und es gilt

$$v'(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\Big(h_1(z), \ldots, h_n(z)\Big) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial z}(z).$$

Der Beweis verbleibt als Übung. Der entsprechende Beweis aus der mehrdimensionalen reellen Analysis dient als Modell.

Es verbleibt die Frage, ob diese Definition sinnvoll ist oder ob man wie beim Übergang von reeller zu komplexer Differenzierbarkeit nicht besser eine stärkere Beziehung zwischen den partiellen Ableitungen f_{z_j} hätte fordern müssen. Wir argumentieren nun, warum dies nicht nötig ist. Sei $z_0 = (z_{0_1}, \ldots, z_{0_n}) \in \mathbb{C}^n$. Dann betrachten wir Potenzreihen in n Variablen

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_n=0}^{\infty} a_{j_1,\ldots,j_n}(z - z_{0_1})^{j_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_{0_n})^{j_n}.$$

Gibt es ein Tupel von Radii $\underline{R} = (R_1, \ldots, R_n)$, sodass die Abschätzung

$$|a_{j_1,\ldots,j_n}| \leqslant \frac{M}{R_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot R_n^{j_n}} \tag{1}$$

für eine Konstante $M \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $(j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$ gilt, so konvergiert die Potenzreihe auf dem Rechteck

$$B_{Z_0}(\underline{R}) = \Big\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1 - z_{0_1}| < R_1, \ldots, |z_n - z_{0_n}| < R_n\Big\}.$$

Zum Bestimmen der partiellen Ableitungen, sagen wir nach z_i, können wir die anderen Variablen $z_j, j \neq i$ als Konstanten ansehen und die Sätze aus Abschnitt 5.2 auf die Variable z_j anwenden. Wir erhalten daher:

Proposition 8.3 *Erfüllt die Potenzreihe f die Abschätzung (1), so hat f partielle Ableitungen beliebiger Ordnung und es gilt*

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} f}{\partial {z_1}^{k_1} \partial {z_2}^{k_2} \ldots \partial {z_n}^{k_n}} = k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!\, a_{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

Satz 8.4 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ist $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in $z_0 \in D$, so ist f in einer Umgebung von z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar. Folglich besitzt f partielle Ableitungen beliebiger Ordnung.*

Beweis : Zur notationellen Vereinfachung beweisen wir nur den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall folgt analog durch eine n-fache statt zweifache Anwendung der Cauchy-Integralformel. Wir wählen R_1 und R_2 so klein, dass das der Abschluss des Rechtecks $Bz_0(\underline{R})$ ganz in D liegt, wobei $z_0 = (z_{0_1}, z_{0_2})$ und $\underline{R} = (R_1, R_2)$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_2 - z_{0_2}| = r2} \tfrac{f(z_1,\zeta_2)d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \\ &= \left(\tfrac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{|\zeta_2 - z_{0_2}| = r_2} \int\limits_{|\zeta_1 - z_{0_1}| = r_1} \tfrac{f(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2. \end{aligned}$$

Analog zum Fall in einer Variablen verwendet man nun die Potenzreihenentwicklung.

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_{0_1})^{k_1}(z_2 - z_{0_2})^{k_2}}{(\zeta_1 - z_{0_1})^{k_1+1}(\zeta_2 - z_{0_2})^{k_2+1}}.$$

Wie dort prüft man die dominierte Konvergenz der Folge der Patrialsummen, um Limes und Integral vertauschen zu können. Damit erklärt man

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_1,k_2}(z_1 - z_{0_1})^{k_1}(z_2 - z_{0_2})^{k_2},$$

wobei

$$a_{k_1k_2} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{|\zeta_2 - z_{0_2}| = r_2} \int\limits_{|\zeta_1 - z_{0_1}| = r_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_{0_1})^{k_1+1}(\zeta_2 - z_{0_2})^{k_2+1}} d\zeta_1 d\zeta_2,$$

und damit die gewünschte Potenzreihenentwicklung auf $B_{z_0}(\underline{R})$. □

9 Differentialgleichungen

Eine *Differentialgleichung* n-ter Ordnung in einer reellen oder komplexen Veränderlichen x ist eine Funktion $F(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ in $n + 2$ Variablen. Eine *Lösung* der Differentialgleichung ist eine n-fach reell (bzw. komplex) differentierbare Funktion $\phi(x)$, sodass

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

gilt. Wir schreiben oft $y = \phi(x)$ und nennen den Ausdruck $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ „die" Differentialgleichung.

Viele Beispiele von Differentialgleichungen entstammen der Physik: Wir untersuchen den freien Fall aus großer Höhe. Der Parameter ist $y = y(t)$, Abstand zum

Erdmittelpunkt, welcher vom Zeitpunkt t abhängig ist. Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands, genauer gilt

$$y''(t) = -\gamma M \cdot \frac{1}{y(t)^2},$$

wobei M die Erdmasse und γ die Gravitationskonstante ist. In diesem Fall ist

$$F(t, y, y', y'') = \gamma M \cdot \frac{1}{y(t)^2} + y''(t)$$

unabhängig von t (und von $y'(t)$). Bei Differentialgleichungen ist es stets ein legitimes Mittel eine Funktion $y(t)$, in der Regel abhängig von einem Parameter, zu raten. Kann man die Differentialgleichung nicht lösen, versucht man eben eine neue, allgemeinere Klasse von Funktionen. Hier probieren wir

$$y(t) = a \cdot t^b.$$

Die Differentialgleichung besagt dann

$$a \cdot b(b-1)t^{b-2} = -\gamma M a^{-2} t^{-2b},$$

woraus $b = \frac{2}{3}$ und $a = (9\gamma M/2)^{1/3}$ resultiert.
Damit haben wir Lösungen gefunden. In der Regel hat man weitere Vorgaben zu einem gewissen Zeitpunkt (sagen wir $t = 0$) bezüglich des Orts $y(t)$ und der Geschwindigkeit.
Hat man eine Differentialgleichung n-ter Ordnung F gegeben, so nennt man die Suche einer Lösung $y(x)$ mit

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

für ein vorgegebenes x_0 ein *Anfangswertproblem*.

Wir werden zunächst einige praktische Verfahren untersuchen, um Lösungen von Differentialgleichungen zu erraten. Oftmals findet man so keine Lösung und dann stellt sich die Frage, ob man wenigstens abstrakt die Existenz einer Lösung grantieren kann. In beiden Fällen ist es wichtig zu wissen, ob die Lösung eindeutig ist. Schließlich werden wir bei speziellen Typen von Gleichungen, insbesondere linearen, die Struktur der Lösungsmenge genauer untersuchen.

Wir betrachten nochmal die Gleichung des freien Falls, also $y(t) = a \cdot t^{2/3}$ mit obigem a. Dann ist die Geschwindigkeit $y'(t) = \frac{2}{3} a t^{-1/3}$, also stets positiv. Dies ist nicht wirklich die Gleichung eines Falls, sondern eines Objekts, das sich von der Erde entfernt, gebremst von der Gravitation. Um zu sehen, wann dies eintritt, also welche Geschwindigkeit das Objekt an der Erdoberfläche $y_0 = 6.370 \cdot 10^6$ haben muss, löst man nach y' als Funktion von t auf und erhält

$$y'(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{y_0}}$$

und nach Einsetzen von M und γ

$$y'(t) \sim 11,2\,\mathrm{km/s},$$

die Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche.

9.1 Explizite Differentialgleichungen

Ist die n-te Ableitung gegeben als Funktion der anderen Variablen, also

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1}),$$

so nennt man die Differentialgleichung *explizit*. Wir schränken uns in diesem Abschnitt auf Ordung $n = 1$ ein und betrachten Beispielklassen.

9.1.1 Die Variable y kommt in f nicht vor

Die Differentialrechung $y' = f(x)$ beschreibt nichts anderes als die Suche nach einer Stammfunktion von f. Stammfunktionen sind eindeutig bis auf eine additive Konstante. Folglich ist das ein Anfangswertproblem.

$$y' = f(x), y(x_0) = y_0$$

eindeutig durch

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt,$$

lösbar.

9.1.2 Die Variable x kommt in f nicht vor

Nehmen wir an lokal in einer Umgebung von x_0 sei $y(x)$ umkehrbar und $x(y)$ die Umkehrfunktion. Dann folgt aus $y'(x) = f(y)$

$$1 = \frac{dx\,(y(x))}{dx} = \frac{dx(y)}{dy} \cdot \frac{dy(x)}{dx} = x'f(y), \text{ also } x' = f(y)^{-1}$$

und wir haben das Problem auf das vorige zurückgeführt. In der Praxis rechnet man einfach wie im folgenden Beispiel mit den Symbolen dx und kümmert sich nicht um Invertierbarkeit. Erst nach Auffinden der formalen Lösung muss man natürlich Definitionbereiche deklarieren.

Beispiel 9.1 Wir betrachten $y' = -3y$. Offenbar ist $y(x) = 0$ eine triviale Lösung dieser Differentialgleichung. Wir ignorieren diese Lösung hier und in einigen folgenden Beispielen und suchen nach weiteren Lösungen. Wir erhalten aus der Differentialgleichung eine Gleichheit von Differentialformen (wir werden diesen Begriff in dieser Vorlesung nicht erklären) $dy/y = -3dx$, welche wir integrieren und $ln\,|y| = -3x + c$ oder

$$|y| = e^{c-3x}$$

erhalten. Diese Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differentierbar und genügt der Differentialgleichung. Die gesamte Lösungsmenge besteht also aus zwei getrennten Zweigen, y positiv und y negativ.
Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig und enthält nicht Null, z.B. $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$, so hat $1/y$ auf D eine Stammfunktion, den komplexen Logarithmus. Auch ohne diesen zu kennen, ist

$$y(x) = e^{c-3x}$$

holomorph und genügt der Differentialgleichung.

9.1.3 Getrennte Veränderliche $y' = f(x) \cdot g(y)$

Dieser Fall verallgemeinert den vorigen. In der Praxis trennt man Variablen und Differentiale und integiert.

Beispiel 9.2 $y' = x^2 \cdot y$ formen wir zu $\frac{dy}{y} = x^2 \cdot dx$ um, integrieren zu $ln\,|y| = \frac{1}{3}x^3 + c$ und exponentieren um $y = \pm e^{c+\frac{1}{3}x^3}$ zu erhalten.

Hier können wir Existenz und Eindeutigkeit formal beweisen.

Satz 9.3 *Seien $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I, y_0 \in J$ und $g(y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, sodass es auf U genau eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(x) \cdot g(y),\ y(x_0) = y_0$$

gibt. Sie ist gegeben durch Auflösen der Gleichung

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Beweis : Sei $G(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}$ und $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$. Diese Integrale existieren in einer Umgebung von x_0 bzw. y_0, da $g(y_0) \neq 0$. Auf dieser Umgebung existiert, da G stetig differentierbar ist, eine lokale Umkehrfunktion H, welche stetig differentierbar ist. D.h. $y = H\left(G(y)\right)$ in einer Umgebung von y_0. Sei also

$$y(x) := H\left(F(x)\right).$$

Diese Funktion ist differentierbar, da F und H dies sind und aus $G\left(y(x)\right) = F(x)$ folgt durch Ableiten

$$\frac{y'(x)}{g(y)} = G'\left(y(x)\right) \cdot y'(x) = F'(x) = f(x),$$

also ist die Differentialgleichung erfüllt. Wir prüfen noch die Anfangswertbedingung. Aus $F(x_0) = 0$ und $G(y_0) = 0$, also $H(0) = y_0$ folgt $y(x_0) = H\left(F(x_0)\right) = y_0$.

Ist neben $y(x)$ auch $z(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems, so ist in einer Umgebung von z_0, in der g nicht Null wird

$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = f(x).$$

Dann ist

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{z'(t)}{g(z(t))}dt = \int\limits_{y_0}^{z(x)} \frac{ds}{g(s)},$$

wobei bei der letzten Umformung die Substitution $s = z(t)$ durchgeführt wurde. Diese Gleichung besagt $F(x) = G(z(x))$, also $z(x) = H(F(x)) = y(x)$, was noch zu zeigen war. $\square$

9.1.4 Substitutionsmethoden

Als erstes Beispiel betrachten wir für $a, b, c \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$)

$$y' = f(ax + by + c), \quad (b \neq 0).$$

Wir substituieren $u(x) = ax + by(x) + c$ und erhalten für u die Differentialgleichung

$$u' = a + by'(x) = a + b \cdot f(u).$$

Dabei tritt die Variable x auf der rechten Seite nicht mehr auf und wir können die Gleichung mit obigen Methoden nach $u(x)$ lösen. Dann ist $y(x) = \frac{1}{b}\,(u(x) - ax - c)$.

Als zweites Beispiel betrachten wie eine homogene Differentialgleichung

$$y' = f(y/x).$$

Hier substituieren wir $u(x) = y(x)/x$ und erhalten $y' = u(x) + x \cdot u'(x) = f(u)$, also

$$u' = \frac{f(u) - u}{x},$$

was eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen ist.

Im dritten Beispiel

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

entwickeln wir diese Substitutionstechnik noch weiter. Ist $c = \gamma = 0$, so ist das Argument von f gleich

$$\frac{ax + by}{\alpha x + \beta y} = \frac{a + b(y/x)}{\alpha + \beta(y/x)}.$$

Mit $g(t) = \frac{a+bt}{\alpha+\beta t}$ liegt also eine Differentialgleichung

$$y' = (f \circ g)(\frac{y}{x})$$

vor, die wir wie oben beschrieben lösen können. Ist (x_0, y_0) eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} ax + by & = & -c \\ \alpha x + \beta y & = & -\gamma \end{array},$$

so führt die Sustitution $\widetilde{y} = y - y_0$ und $\widetilde{x} = x - x_0$ zu einer Differentialgleichung gleicher Bauart mit $c = \gamma = 0$. Aus einer Lösung $\widetilde{y} = \widetilde{y}(\widetilde{x})$ hiervon gewinnt man die gesuchte Lösung durch Rücksubstitution

$$y(x) = \widetilde{y}(\widetilde{x} + x_0) + y_0.$$

Das Gleichungssystem ist lösbar, falls $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$ ist. In den anderen Fällen ist die Differentialgleichung bereits homogen, wie man mit Fallunterscheidung leicht nachprüft.

9.1.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen der Form

$$y' + g(x) \cdot y = h(x)$$

werden *linear* (erster Ordnung) genannt. Ist $h(x)$ die Nullfunktion, so wird die Differentialgleichung *homogen* genannt. In diesem Fall sind die Variablen getrennt, die Lösungen lassen sich also nach dem Verfahren aus 9.1.3 bestimmen. Diese sind durch

$$y(x) = y_0 e^{-G(x)}, \quad \text{mit} \quad G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g(t)dt$$

gegeben, wobei y_0 beliebig ist. Die angegebene Lösung genügt auch der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$. Wir zeigen, dass es die einzige ist. Sei $\varphi(x)$ eine Lösung und $u(x) = e^{G(x)} \cdot \varphi(x)$. Dann ist

$$u'(x) = e^{G(x)} \cdot (\varphi'(x) + \varphi(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Also ist $u(x)$ konstant und $\varphi(x)$ von der Gestalt oben. Die inhomogene lineare Differentialgleichung löst man durch den Ansatz

$$y(x) = C(x)e^{-G(x)},$$

genannt *Variation der Konstanten*. Dies ist eine Lösung, falls

$$0 = y' + gy - h = (C' - gC + gC) \cdot e^{-G} - h = C'e^{-G} - h,$$

also falls

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} h(t)e^{G(t)}dt + C_0.$$

Damit haben wir bereits alle Lösungen gefunden. Denn sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung, so ist

$$(y_1 - y_2)' + g(y_1 - y_2) = 0,$$

also $y_1 - y_2$ eine Lösung der homogenen und damit

$$y_1 - y_2 = y_0 \cdot e^{-G}$$

nach dem oben bewiesenen. Dies entspricht gerade dem Abändern der Konstanten C_0.

10 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

10.1 Der Lipschitz-stetige Fall

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad \text{für} \quad x \in [x_1, x_2] \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Die wesentliche Voraussetzung, die wir hier treffen, ist die *Lipschitzstetigkeit* von f auf dem Streifen

$$S = \Big\{(x, y)\colon x \in [x_1, x_2],\ -\infty < y < +\infty\Big\}$$

in y-Richtung, d.h. es gibt ein $L \geqslant 0$ mit

$$|f(x, y) - f(x, \widetilde{y})| \leqslant L \cdot |y - \widetilde{y}|$$

für alle $(x, y), (x, \widetilde{y}) \in S$. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

Satz 10.1 *Das Anfangswertproblem (2) mit f Lipschitzstetig auf S ist eindeutig lösbar.*

Zum Beweis benötigen wir einen Fixpunktsatz, der in der Numerik und Funktionalanalysis bewiesen wird. Wir wiederholen nur die notwendigen Begiffe.
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, in den Anwendungen typischerweise unendlichdimensional. Dieser Vektorraum heißt *vollständig* oder *Banachraum*, falls jede Cauchyfolge einen Grenzwert in V besitzt. Ist V der Vektorraum der stetigen Funktionen auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \Big\{ \, |f(x)| \, \Big\},$$

so ist dies offenbar eine Norm. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen in V ist eine Cauchyfolge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein N_0 existiert mit

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

für alle $n, m > N_0$. Per Definition ist dies mit gleichmässiger Konvergenz gegen den punktweisen Limes $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ gleichbedeutend. Also ist f wieder stetig und daher $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Fügt man eine Gewichtsfunktion $G\colon K \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ein, betrachtet man die Norm

$$\|f\|_{\infty,G} := \sup_{x\in K} \Big\{ |f(x)| \cdot G(x) \Big\}$$

so bleibt der Satz über den stetigen Limes einer Cauchyfolge stetiger Funktionen gültig, da G auf der kompakten Menge K ein Minimum größer Null hat.

Als Gegenbeispiel behalte man $K = [0,1]$, V die stetigen Funktionen auf K und ändere die Norm ab zu

$$\|f\| = \int\limits_0^1 f(t)dt.$$

Dann ist

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [0, 1/2] \\ 2n\cdot(x-1/2) & \text{für} \quad x \in [1/2, 1/2 + 1/2n] \\ 1 & \text{für} \quad x \in [1/2 + 1/2n, 1] \end{cases}$$

eine Cauchyfolge, aber der einzige Kandidat für einen Limes (bis auf Nullmengen) die charakteristische Funktion auf dem Intervall $[1/2, 1]$, welche auf K nicht stetig ist.

Satz 10.2 (Banach'scher Fixpunktsatz) *Sei $D \subseteq (V, \|\cdot\|)$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums und $T\colon D \longrightarrow D$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. $\exists 0 < q < 1$ mit*

$$\|Tx - Ty\| \leqslant q \cdot \|x - y\|.$$

Dann gibt es in D genau einen Fixpunkt x_∞ von T (d.h. $T(x_\infty) = x_\infty$) und für beliebiges $x \in D$ konvergiert die Folge $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_∞.

Beweis des Satzes 10.1 : Wir schreiben das Anfangswertproblem so um, dass die Lösung Fixpunkt einer Selbstabbildung eines Banachraums ist. Da f stetig ist, muss $u(x) = f(x, y(x))$ ebenfalls stetig sein. Also ist jede Lösung des Anfangswertproblems sogar stetig differenzierbar. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass jede Lösung der Gleichung

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

genügt. Umgekehrt genügt jede (a priori nur) stetige Lösung $y(x)$ dieser Integralgleichung der Anfangswertvorgabe $y(x_0) = y_0$ und da die rechte Seite differenzierbar ist, muss $y(x)$ automatisch auch differenzierbar sein. Wir betrachten also die Abbildung

$$T\colon y(x) \longmapsto (Ty)(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt$$

auf den Banachraum V der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ mit der gewichteten Norm $\|\cdot\|_{\infty,G}$ und $G(x) = e^{2Lx}$, wobei L eine Lipschitzkonstante von f ist. Dann ist für $y, z \in C\Big([x_1, x_2]\Big)$

$$|T(y) - T(z)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f\Big(t, y(t)\Big) - f\Big(t, z(t)\Big) dt \right|.$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \quad L \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \|y(t) - z(t)\| \cdot e^{-2Lt} e^{2Lt} dt \\
&\leqslant \quad L \cdot \|y - t\|_{\infty,G} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} e^{2Lt} dt \\
&\leqslant \quad L \cdot \|y - t\|_{\infty,G} \frac{e^{2Lt}}{2L}
\end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned}
\|T(y) - T(z)\|_{\infty,G} &= \sup_{x \in K} |T(y) - T(z)| \cdot G(x) \\
\leqslant L \cdot \|y - z\|_{\infty,G} \cdot \sup_{x \in K} \frac{e^{2Lx}}{2L} \cdot e^{-2Lx} &= \frac{1}{2} \|y - z\|_{\infty,G}
\end{aligned}$$

und damit T eine kontrahierende Abbildung des Banachraums in sich. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts von T und damit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems. □

Man beachte, dass dieser Beweis konstruktiv ist, also ein praktisches Verfahren zur Bestimmung der Lösung beinhaltet. Man starte mit einer beliebigen stetigen Funktion und iteriere die Anwendung des Integraloperators bis man eine Lösung in gewünschter Näherung bestimmt hat.

10.2 Existenz und Eindeutigkeit im Komplexen

Ist die rechte Seite einer expliziten Differentialgleichung

$$w' = f(z, w), w(z_0) = w$$

holomorph, so hat das Anfangswertproblem auf mindestens einem geeigneten Ball im Definitionsbereich eine Lösung.

Satz 10.3 *Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf einem Gebiet, das ein Rechteck*

$$R = \Big\{(z, w)\colon |z - z_0| \leqslant a, |w - w_0| \leqslant b\Big\}$$

enthält.

Ist $|f| \leqslant M$ auf diesem Rechteck, so besitzt das Anfangswertproblem

$$w' = f(z, w(z)), \quad w(z_0) = w_0$$

zumindest auf dem Kreis

$$K = \Big\{|z - z_0| < \alpha = \min\{a, b/M\}\Big\}$$

eine Lösung. Zwei Lösungen w_1 und w_2, die beide auf einem Gebiet G mit $z_0 \in G$ definiert sind, stimmen überein.

Beweis : Für z mit $|z - z_0| < a$ folgt aus der Standardabschätzung für Wegintegrale

$$|f(z, w_1) - f(z, w_2)| \leqslant \sup_{(z,w)\in R} |f_w(z, w)| \cdot |w_1 - w_2|$$

und da $f_w(z, w)$ wieder holomorph ist, nimmt diese Funktion auf dem Rechteck das Supremum $L < \infty$ an. Dies ist die gewünschte Lipschitz-Abschätzung und der Rest des Beweises verläuft nun wie im reellen Fall.

Das Anfangswertproblem ist äquivalent zu der Integralgleichung

$$w(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(\zeta, w(\zeta))d\zeta,$$

wobei die rechte Seite aufgrund der Holomorphie des Integranden wegunabhängig ist. Wir suchen eine Lösung in dem Vektorraum V der holomorphen Funktionen auf dem Kreis K, die zudem auf K beschränkt sind. Mit der Norm

$$\|u\| = \sup_K |u(z)|e^{-2L|z-z_0|}$$

ist dieser Raum vollständig, denn der punktweise Limes einer gleichmässig konvergenten Folge holomorpher Funktionen ist wieder holomorph und der punktweise Limes einer Cauchyfolge beschränkter Funktionen bezüglich der angegebenen Norm ist wieder beschränkt. In diesem Raum betrachten wir den Unterraum V_b aller Funktionen u mit $|u(z) - w_0| \leqslant b$ für alle $z \in K$. Dies ist ein abgeschlossener Unterraum von V und somit wieder ein Banachraum. Wir wollen zeigen, dass

$$(Tu)(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(\zeta, u(\zeta))d\zeta$$

den Raum V_b in sich abbildet und eine Kontraktion ist. Holomorphie von Tu ist offensichtlich und für alle $z \in K$ gilt

$$|Tu(z) - w_0| \leqslant \int_{z_0}^{z} \Big|f(\zeta, u(\zeta))\Big| d\zeta \leqslant M \cdot |z - z_0| \leqslant \alpha \cdot M \leqslant b.$$

Wir schätzen das Integral mit Hilfe des Wegs $\gamma(t) = z_0 + t \cdot e^{i\phi},\ t \in [0, |z - z_0|]$ entlang der Verbindungsstrecke von z nach z_0 ab, wobei wir $z - z_0 = e^{i\phi} \cdot |z - z_0|$ gesetzt haben. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\Big|T(u(z)) - T(v(z))\Big| &= \left|\int_{z_0}^{z} f(\zeta, u(\zeta)) - f(\zeta, v(\zeta))\right| d\zeta \\
&\leqslant L \cdot \int_{0}^{|z-z_0|} \Big|u(\gamma(t)) - v(\gamma(t))\Big| \cdot e^{-2Lt} \cdot e^{2Lt} dt \\
&\leqslant L \cdot \|u - v\| \int_{0}^{|z-z_0|} e^{2Lt} dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{2} e^{2L|z-z_0|} \|u - v\|,
\end{aligned}$$

also insgesamt $\|Tu - Tv\| \leqslant \frac{1}{2}\|u - v\|$. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Existenz und auch die Eindeutigkeit, wenn beide Lösungen auf K definiert sind.

Für die etwas allgemeinere Formulierung der Eindeutigkeitsaussage im Satz argumentiert man wie folgt: Angenommen w_1 und w_2 sind zwei Lösungen, die auf G übereinstimmen und sich in einem Punkt $z_1 \in G$ unterscheiden. Sei $\gamma(z)$ ein Weg von z_0 nach z_1, mit $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$. Dann gibt es ein größtes $t_0 < 1\ \ w_1(\gamma(t)) = w_2(\gamma(t))$ für alle $t \leqslant t_0$. Wir betrachten das neue Anfangswertproblem mit der gleichen Differentialgleichung, aber dem Angangswert $w(\gamma(t_0)) = w_1(\gamma(t_0))$. Ein kleines

Rechteck um $\Big(\gamma(t_0), w_1(\gamma(t_0))\Big)$ liegt in G und wir können den ersten Teil des Arguments auf das Rechteck anwenden. Also erhalten wir die Eindeutigkeit der Lösung in einem Kreis um $\gamma(t_0)$, im Widerspruch zur Maximalität in der Wahl von t_0. Also stimmen w_1 und w_2 auf ganz G überein. $\square$

Wir verwenden nun, dass sich jede holomorphe Funktion, also auch die Lösung des obigen Anfangswertproblems in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Wir können also $w(z)$ als $w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ auf dem Kreis $|z-z_0| < \alpha$ schreiben. Die rechte Seite der Differentialgleichung können wir ebenfalls als Potenzreihe

$$f(z,w) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}(z-z_0)^i(w-w_0)^j$$

schreiben. Durch Koeffizientenvergleich erhält man aus der Identität

$$\sum_{i=1}^{\infty} ia_i(z-z_0)^{i-1} = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}(z-z_0)^i \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right)^j$$

Rekursionsformeln für die a_i: Kennt man die Koeffizienten a_i für $i = 0, \ldots, k$, so erhält man durch Auswerten der rechten Seite für alle (i,j,n) für $i + nj \leqslant k$ die Potenzreihe bis zur Potenz $(z-z_0)^k$ während der Koeffizient von $(z-z_0)^k$ auf der linken Seite gerade $(k+1)a_{k+1}$ ist, also bis auf eine Konstante der gesuchte nächste Koeffizient.

Wir betrachten das Beispiel

$$w' = z^2 + w^2, \quad w(0) = 1.$$

Der obige Koeffizientenvergleich mit dem Ansatz $w(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ ergibt

$$\sum_{i=1}^{\infty} ia_i z^{i-1} = z^2 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\right)^2 = z^2 + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j}\right) z^i$$

und damit

$$(i+1)a_i = \sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j} + \delta_{i,2}.$$

Also ist $a_0 = 1, a_1 = a_0^2 = 1; 2a_2 = 2a_0a_1$ ergibt $a_2 = 2$; $3a_3 = 2a_0a_2 + a_1^2 + 1$ ergibt $a_3 = 4/3$ und $4a_4 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2$ ergibt $a_4 = 7/6$. Also ist

$$w(z) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \ldots$$

Damit haben wir einen Ansatz, der sukzessive bessere Näherungen an die Lösung liefert. Oftmals genügt es Lösungen von Differentialgleichungen (gut) abzuschätzen. Wir zeigen induktiv, dass $a_i \geqslant 1$. Dies ist für $i \leqslant 3$ sicher richtig. Danach gilt die Abschätzung

$$(i+1)a_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j} \geqslant i+1,$$

woraus die Behauptung folgt. Für die Lösung $w(z)$ gilt also für $z \in \mathbb{R} > 0$

$$w(z) \geqslant 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Hieraus folgt, dass die Lösung (auf $\mathbb{R}_{>0}$) bis maximal zum Punkt $z = 1$ existiert bzw. als Potenzreihe um $z = 0$ auf einem Kreis vom Radius maximal Eins konvergiert.

10.3 Der Existenzsatz von Peano

Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = \sqrt{|y|}$ bzw. das Anfangswertproblem $y(0) = 0$. Ist g(x) eine Lösung, so ist offenbar auch $-y(-x)$ eine Lösung. Wir können uns also auf die Such nach positiven Lösungen machen (und danach am Nullpunkt spiegeln). Da die rechte Seite unabhängig von x ist, liefert Integration des Ansatzes

$$\frac{dy}{y} = dx$$

die Funktion $y_c(x) = (x+c)^2/4$. In der Umgebung eines positiven Anfangswerts sind nach Satz 10.1 damit alle Lösungen gegeben. Für den Anfangswert Null ist zudem $y = 0$ eine Lösung und man kann sich aus beiden Typen Lösungen zusammenbasteln, z.B. für $B_1, B_2 \in \mathbb{R}_{>0}$

$$y(x) = \begin{cases} (x-B_2)^2/4 & \text{für} \quad x \geqslant B_2 \\ 0 & \text{für} \quad x \in (-B_1, B_2) \\ (x+B_1)^2/4 & \text{für} \quad x < -B_1. \end{cases}$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist offenbar bei $y = 0$ stetig, aber nicht Lipschitz-stetig, die Eindeutigkeitsaussage aus Satz 10.1 gilt offenbar unter diesen Voraussetzungen nicht. Der folgende Satz von Peano sichert aber zumindest die Existenz einer Lösung.

Satz 10.4 *Ist $f(x, y)$ in einem Gebiet stetig, so geht durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Jede Lösung lässt sich nach links und rechts bis zum Rand von D fortsetzen.*

Beweis : Offenbar genügt es die Existenz rechts vom Startpunkt und bis an den rechten Rand von D zu zeigen. Im ersten Schritt zeigen wir die Aussage unter der Zusatzannahme, dass f in einem Streifen $S = [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}$ für ein $a > 0$ (definiert und) durch die Konstante C beschränkt ist. Sei $J = [x_0, x_0 + a]$. Wir betrachten die integrierte Form der Differentialgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

und wollen für jedes $\alpha > 0$ eine „Näherungslösung“$z_\alpha(x)$ konstruieren, welche

$$z_\alpha(x) = \begin{cases} y_0 & \text{für} \quad x \leqslant x_0 \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, z_\alpha(t - \alpha))dt & \text{für} \quad x \in J \end{cases}$$

genügt. Für $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$ ist der Integrand durch den ersten Fall (die obere Zeile) wohldefiniert und wir können z_α dort definieren. Für $x_0 \in [x_0 + \alpha, x_0 + 2\alpha]$ ist der Integrand aufgrund des soeben gesagten und der dabei konstruierten Funktion bestimmt und auf diese Weise hangeln wir uns weiter, bis wir ganz J überdeckt haben. Aus $|f| \leqslant C$ folgt $|z'_\alpha| \leqslant C$, d.h. die konstruierten Funktionen sind Lipschitzstetig mit einer Lipschitz-Konstante C, welche unabhängig von α ist. Die Folge $(z_{1/n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist also gleichgradig stetig, besitzt folglich nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine gleichmässig konvergente Teilfolge, die wir mit $(z_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (z_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen. Wir bezeichnen den Limes mit $y(x)$. [2] Dieser Limes ist stetig auf J. Aus

$$\begin{aligned} |z_n(t - \alpha_n) - y(t)| &\leqslant |z_n(t - \alpha_n) - z_n(t)| + |z_n(t) - y(t)| \\ &\leqslant C \cdot \alpha_n + |z_n(t) - y(t)| \end{aligned}$$

folgt, dass auch $z_n(t - \alpha_n)$ gleichmässig gegen $y(t)$ auf J konvergiert. Folglich konvergiert auch $f(t, z_n(t - \alpha_n))$ gleichmässig auf J gegen $f(t, y(t))$. Wir können also in der definierenden Integralgleichung für z_{α_n} den Limes $n \longrightarrow \infty$ und das Integral vertauschen und erhalten, dass $y(x)$ der gewünschten Integralgleichung genügt.

Für die allgemeine Existenzaussage betrachten wir ein Rechteck

$$R = [x_0, x_0 + a] \times \{|y - y_0| \leqslant b\},$$

welches ganz in D liegt und setzen $A = \max\limits_{(x,y)\in R} ||f(x, y)||$ sowie $\alpha = \min\{a, b/A\}$.

[2] Man beachte, dass zu diesem Zeitpunkt noch nicht klar ist, ob $y(x)$ die obige Integralgleichung erfüllt. Dies wird im folgenden erst bewiesen.

Wir setzen $f|_R$ stetig auf ganz $J \times \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x, y_0 - b) & \text{für} \quad y < y_0 - b \\ f(x,y) & \text{für} \quad (x,y) \in R \\ f(x_0, y_0 + b) & \text{für} \quad y > y_0 + b \end{cases}$$

fort. Dann können wir die Existenzaussage aus dem ersten Argument verwenden, um eine Lösung y von $y' = \widetilde{f}(x,y)$ zu konstruieren. Solange $(x, y(x)) \in R$ liegt, ist dies auch eine Lösung unseres eigentlichen Problems. Wegen $\left|\widetilde{f}\right| \leq A$ ist $|y'| \leqslant A$ und damit ist für $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$ der Punkt $(x, y(x)) \in R$.

Die Fortsetzbarkeit bis an den rechten Rand zeigen wir, indem wir für jedes Kompaktum $K \subseteq D$ zeigen, dass sich eine auf K definierte Lösung $y(x)$ über K hinaus fortsetzen lässt. Das Kompaktum K hat einen positiven Abstand, wir nennen ihn 3ρ, vom Rand von D. Sei $K_{2\rho}$ die Menge aller Punkte mit Abstand $\leq 2\rho$ von K. Diese Menge ist ebenfalls kompakt und daher $||f|| \leqslant C$ auf $K_{2\rho}$ für $C \in \mathbb{R}$. Das Rechteck

$$R = [x_0, x_0 + \rho] \times \{|y - y_0| < \rho\}$$

liegt in $K_{2\rho}$, falls $(x_0, y_0) \in K$ liegt. In jedem solchen Punkt können wir den zweiten Schritt des Beweises anwenden und die Lösung um $\alpha = \{\rho, \rho/C\}$ weiter nach rechts fortsetzen. Da die Schrittweite α von (x_0, y_0) unabhängig ist, haben wir irgendwann die Lösung über K hinaus fortgesetzt.
Die endgültige Fortsetzungsmenge erhalten wir, indem wir D durch Kompakta ausschöpfen, z.B. durch

$$K_n = \{(x,y) : d((x,y), \partial D) \geqslant \frac{1}{n}\}$$

und mit dem vorigen Argument die Lösungen über jedes K_n hinaus fortsetzt. $\square$

Man beachte, dass der Existenzsatz von Peano aufgrund der Verwendung des Satzes von Arzelà-Ascoli nicht konstruktiv ist, also kein Verfahren zum Auffinden der Lösung (auch nicht näherungsweise) angibt und sich darin vom Satz im Lipschitz-stetig Fall unterscheidet.

11 Lineare Differentialgleichungen

Ziel dieses Abschnitts ist es, Differentialgleichungen höherer Ordnung zu lösen, zumindest wenn diese linear, also von der Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x) \tag{3}$$

für gegebene Funktionen $a_j(x)$ und $b(x)$ von einem reellen oder komplexen Parameter x, sind. Dazu starten wir mit einem Exkurs zu Systemen von Differentialgleichungen und erhalten eine Struktur der Lösungsmenge wie im Fall linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Im Fall konstanter Koeffizienten (die $a_j(x)$ hängen nicht von x ab) werden wir die Lösung explizit bestimmen können. Interessant wird die Struktur der Lösungen dort, wo einer der Koeffizienten $a_j(x)$ einen Pol hat - in der Nähe der sogenannten Singularitäten der Differentialgleichung.

11.1 Systeme von Differentialgleichungen

Eine Kollektion von n Funktionen (reell- oder komplexwertig)

$$F := \{F_1(x_0, \ldots, x_{n+1}), \ldots, F_n(x_0, \ldots, x_{n+1})\}$$

bildet ein *System von Differentialgleichungen erster Ordnung*. Die n differenzierbaren Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ von einem (reellen oder komplexen) Parameter x bilden eine *Lösung* des Systems F, falls

$$F_j\Big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_j'(x)\Big) = 0 \quad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, n$$

für x in einem vorgegebenen Intervall von $\mathbb{R}$ (oder einem Gebiet von $\mathbb{C}$).

Sind die Funktionen F_j in der Form $F_j = x_{n+1} - f_j(x_0, \ldots, x_n)$ gegeben, so nennt man das System *explizit* und schreibt kurz

$$y_j' = f_j(x, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots n$$

für das System von Differentialgleichungen. Wir werden im folgenden ausschließlich explizite Differentialgleichungen untersuchen. Mit der Vorgabe von $x_0, y_{0,1}, \ldots, y_{0,n}$ und den Bedingungen

$$y_j(x_0) = y_{0,j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

erhalten wir ein *Anfangswertproblem* für das System erster Ordnung.

Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir fettgedruckte Buchstaben für Spaltenvektoren, also typischerweise

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad f(x, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Ableitung und Integral hiervon sind ebenfalls komponentenweise zu verstehen. In dieser Notation lautet das Anfangswertproblem von oben

$$\boldsymbol{y}' = f(x, \boldsymbol{y}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0.$$

Ist $f(x, \boldsymbol{y}) = A(x) \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$ mit $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$) und $\boldsymbol{b}(x) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, so wird das System von Differentialgleichungen ein *lineares System* genannt.

Wir betrachten nochmal die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, gegeben in (3). Ist $y(x)$ eine Lösung hiervon, so setzen wir

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y_1'(x), \quad y_3(x) = y_2'(x), \ldots, y_n(x) = y_{n-1}'(x).$$

Dann gilt

$$y_n'(x) = -(a_0(x)y_1(x) + a_1(x)y_2(x) + \ldots + a_{n-1}(x)y_n(x)) + b(x). \tag{4}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

ist die so definierte (Spaltenvektor-)Funktion $\boldsymbol{y}(x)$ Lösung des Systems

$$\boldsymbol{y}'(x) = A(x) \cdot \boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x). \tag{6}$$

Umgekehrt, ist $\boldsymbol{y}(x)$ Lösung dieses Systems, so gilt (4) und damit ist $y(x) := y_1(x)$ Lösung der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung (3). Zusammengefasst:

Proposition 11.1 *Lösungen der linearen Differentialgleichung (3) stehen in Bijektion zu Lösungen des linearen Systems (6) mit $A = A(x)$ wie in (5).*

Der Leser kann leicht eine entsprechende Bijektion von Anfangswertproblemen formulieren, wobei man bei Gleichungen n-ter Ordnung von der Physik motiviert die Anfangswerte der Funktion $y(x)$ und ihrer Ableitungen $y'(x), \ldots, y^{(n-1)(x)}$ vorgibt.

11.2 Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Systeme von Differentialgleichungen

Wie im Fall einer Differentialgleichung folgt aus einer Lipschitzbedingung für die rechte Seite ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Wir verzichten auf den Beweis, den wir im Prinzip mehrfach gesehen haben.

Die Funktion $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genügt einer *Lipschitzbedingung* bzgl. $\boldsymbol{y}$, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ (genannt Lipschitzkonstante) gibt, sodass für alle $(x,\boldsymbol{y}), (x,\widetilde{\boldsymbol{y}}) \in D$ gilt

$$\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(x,\widetilde{\boldsymbol{y}})\| \leqslant L\,\|\boldsymbol{y} - \widetilde{\boldsymbol{y}}\|\,.$$

(Wie im Fall einer Gleichung werden auch hier nur die Funktionswerte mit festem x verglichen.) Die Lipschitzkonstante hängt von der gewählten Norm auf $\mathbb{R}^n$ ab. Da aber je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ zueinander äquivalent sind, hängt die Existenz einer solchen Norm nicht von der gewählten Norm ab. Hat jeder Punkt $(x,\boldsymbol{y}) \in D$ eine Umgebung U, sodass $\boldsymbol{f}|_U$ einer Lipschitzbedingung genügt, so sagt man, dass $\boldsymbol{f}$ einer *lokalen Lipschitzbedingung* genügt. Diese Abschwächung ist nützlich, um topologische Restriktionen an D zu umgehen:

Lemma 11.2 *Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ von $\boldsymbol{f}$ für $i = 1,\dots,n$ und $j = 1,\dots,n$ stetig und beschränkt, und ist D konvex, so genügt $\boldsymbol{f}$ einer Lipschitzbedingung bzgl. y. Auch ohne Konvexitätsvoraussetzung genügt $\boldsymbol{f}$ einer lokalen Lipschitzbedingung.*

Beweis : Aus dem Mittelwertsatz angewandt auf die Verbindungsstrecke zwischen $\boldsymbol{y}$ und $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ folgt

$$f_i(x,\boldsymbol{y}) - f_i(x,\widetilde{\boldsymbol{y}}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,y^*)(y_j - \widetilde{\boldsymbol{y}}_j),$$

wobei y^* auf dieser Verbindungsstrecke liegt. Ist

$$C = \max_{i,j=1,\dots,n} \sup_{(x,\boldsymbol{y})\in D} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,\boldsymbol{y}) < \infty,$$

so ist

$$\max_{i=1,\dots,n} |f_i(x,\boldsymbol{y}) - f_i(x,\widetilde{\boldsymbol{y}})| \leq n \cdot C \cdot \max_{i=1,\dots,n} |y_i - \widetilde{y}_i|\,.$$

Also ist nC eine Lipschitzkonstante für die $|\cdot|_\infty$-Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, da jeder Punkt eine konvexe Umgebung (einen Ball) in D besitzt. □

Satz 11.3 *Falls $f(x, \boldsymbol{y})\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist und einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. $\boldsymbol{y}$ genügt, so hat das Anfangswertproblem*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

genau eine Lösung. Diese lässt sich bis zum Rand von D fortsetzen.

11.3 Homogene lineare Systeme

Der vorangehende Existenz- und Eindeutigkeitssatz hat eine wichtige Konsequenz für die Struktur der Lösungsmenge des homogenen Systems

$$\boldsymbol{y}'(x) = A(x) \cdot \boldsymbol{y}, \tag{7}$$

wobei wir den reellen Fall ($A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und y reell differenzierbar), sowie den komplexen Fall ($A(x) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und y holomorph) parallel behandeln.

Satz 11.4 *Die Menge der Lösungen $\mathbb{L}$ des homogenen linearen Systems (7), bilden einen reellen (komplexen) Vektorraum. Für jedes x_0 ist die Abbildung $\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}^n$), $\boldsymbol{y} \longmapsto \boldsymbol{y}(x_0)$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist der Lösungsraum n-dimensional.*

Beweis : Sind $\boldsymbol{y}_1$ und $\boldsymbol{y}_2$ Lösungen und $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $a \in \mathbb{C}$), so ist $(a\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)' = a\boldsymbol{y}_1' + \boldsymbol{y}_2' = A(x) \cdot (a\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$ wieder eine Lösung, woraus die erste Behauptung folgt. Zu gegebenem $\boldsymbol{y}_0$ gibt es eine Lösung $\boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$ und zwar genau eine nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Dies zeigt die zweite Behauptung. □

Es ist dennoch im Allgemeinen nicht einfach ein solches homogenes lineares System zu lösen. Wir untersuchen nun das d'Alembertsche Reduktionsverfahren. Es ermöglicht, ausgehend von einem homogenen System der Dimension n, von dem man bereits eine Lösung $\boldsymbol{y}^*(x)$ erraten hat, alle weiteren Lösungen als Lösungen eines Systems von Dimension $n-1$ zu finden. Man macht dazu den Ansatz

$$\boldsymbol{y}(x) = \phi(x) \cdot \boldsymbol{y}^*(x) + \boldsymbol{z}(x), \quad \text{wobei} \quad \boldsymbol{z}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion ist genau dann eine Lösung, wenn

$$\boldsymbol{y}'(x) = \phi'(x)\boldsymbol{y}_1^*(x) + \phi(x)(\boldsymbol{y}_1^*)'(x) + \boldsymbol{z}'(x) = \phi(x)A(x)\boldsymbol{y}^*(x) + A(x)\boldsymbol{z}(x).$$

Da $\boldsymbol{y}_1(x)$ als Lösung vorausgesetzt ist, gilt dies genau dann, wenn

$$\boldsymbol{z}'(x) = A(x)\boldsymbol{z}(x) - \phi'(x) \cdot \boldsymbol{y}^*(x)$$

Ist $A = (a_{ij})$, so bedeutet dies ausgeschrieben für die erste Komponente

$$\sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{(x)} z_j(x) = \phi'(x) \cdot y_1^*(x) \tag{8}$$

und für $i = 2, \ldots, n$ erhalten wir

$$z_i'(x) = \sum_{j=2}^{n} a_{ij}(x) z_j(x) - \phi'(x) y_i^*(x)$$

Daraus eliminieren wir $\phi'(x)$ und erhalten die $n-1$ Differentialgleichungen

$$z_i'(x) = \sum_{j=2}^{m} \left(a_{ij} - \frac{y_i^*}{y_1^*} a_{1j} \right) z_j(x) \tag{9}$$

Hat man dieses System gelöst - was nicht immer in geschlossener Form möglich ist, so muss man nur die Gleichung (8) durch Integration nach ϕ auflösen und erhält

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^*(t)} \cdot \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{(t)} z_j(t) dt.$$

Damit kann man die Lösung $\boldsymbol{y}(x)$ zusammensetzen. Die Integrationskonstante bei der Bestimmung von ϕ ist irrelevant, Addition von C zu ϕ führt zur Addition der bekannten Lösung $C \cdot \boldsymbol{y}^*(x)$ zur neuen Lösung $\boldsymbol{y}(x)$.

Beispiel 11.5 Sei $n = 2$ und $A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}$. Dann ist $\boldsymbol{y}^*(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$ eine Lösung von (7) und wir müssen nur eine weitere finden, um alle Lösungen als Linearkombination der beiden schreiben zu können.
Nach dem d'Alembert-Ansatz müssen wir nur das System (9) lösen, was hier eine Differentialgleichung ist.

$$z_2'(x) = \left(\frac{2}{x} - \left(\frac{-x}{x^2} \right) \cdot (-1) \right) z(x) = \frac{z(x)}{x}.$$

Diese Differentialgleichung ist von getrennten Veränderlichen. (Das geschieht im Fall $n = 2$ aufgrund der Gestalt von (9) immer.) Hier können wir die Lösung $z(x) = x$ sofort ablesen und es ist

$$\phi(x) = \int^{x} \frac{1}{t^2} \cdot (-1) \cdot t dt = -\ln x,$$

also

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} \cdot (-\ln x) + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \ln x \\ x + x \ln x \end{pmatrix}$$

Da $\boldsymbol{y}^*(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind die beiden Lösungen nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz in der Tat linear unabhängig.

11.4 Inhomogene lineare Systeme

Wie im eindimensionalen Fall erhält man alle Lösungen des Systems

$$\boldsymbol{y}'(x) = A(x) \cdot \boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x), \quad A(x) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n, \tag{10}$$

indem man eine („spezielle“) Lösung des inhomogenen Systems findet und dazu eine Linearkombination der Lösungen des homogenen Systems addiert. Angenommen man hat bereits eine Basis $\boldsymbol{y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x)$ von Lösungen von $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\boldsymbol{y}(x)$ gefunden. Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu finden, hilft wie im eindimensionalen Fall die Methode der „Variation der Konstanten“. Wir schreiben die Lösungen des homogenen Systems in eine Matrix $Y(x) = (\boldsymbol{y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x))$ und machen den Ansatz

$$\boldsymbol{z}(x) = Y(x) \cdot \boldsymbol{v}(x), \quad \text{wobei} \quad \boldsymbol{v} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Diese Funktion ist eine Lösung von (10) genau dann, wenn

$$\boldsymbol{z}'(x) = Y'(x) \cdot \boldsymbol{v}(x) + Y(x) \cdot \boldsymbol{v}'(x) = A(x) \cdot Y(x) + Y(x) \cdot \boldsymbol{v}'(x) = A(x)Y(x) + \boldsymbol{b}(x),$$

also wenn

$$Y(x) \cdot \boldsymbol{v}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$$

Nach Satz 11.4 ist $y(x)$ in der Nähe des Anfangspunkts x_0 invertierbar, also ist

$$\boldsymbol{v}(x) = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t) \cdot \boldsymbol{b}(t) dt.$$

Man prüft leicht, dass $\boldsymbol{z}(x)$ nun in der Tat eine Lösung des inhomogenen linearen Systems ist.

Wir setzen das Beispiel 11.5 fort und betrachten das inhomogene Problem mit $\boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 \end{pmatrix}$. In der Notation des obigen Ansatzes ist

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 \ln x \\ -x & x + x \ln x \end{pmatrix},$$

also

$$Y^{-1}(x) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} x(1+\ln x) & x^2 \ln x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$$

und daher

$$Y^{-1}(x)\boldsymbol{b}(x) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} \ln x + 1 - x^2 \ln x \\ 1 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\boldsymbol{v}(x) = \int\limits_1^x Y^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t) dt = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x^2 - 1 + (4 - x^2 + \ln x) \ln x \\ 4 \ln x - 2x^2 + 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{z}(x) = Y(x) \cdot \boldsymbol{v}(x) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x^2(x^2 - 1 + 2\ln x - 2\ln^2 x) \\ x(3 - 3x^2 + 2\ln x + 2\ln^2 x) \end{pmatrix}.$$

11.5 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun homogene lineare Systeme $\boldsymbol{y}'(x) = A \cdot \boldsymbol{y}(x)$, wobei die Matrix ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oder $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$) nicht von x abhängt, also konstante Koeffizienten hat. Dabei ist der Ansatz

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\lambda x} \cdot \boldsymbol{c} \quad \text{mit } \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{oder } \mathbb{C}^n)$$

nützlich. Diese Funktion ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn gilt

$$\boldsymbol{y}'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot \boldsymbol{c} = A \cdot \boldsymbol{c} \cdot e^{\lambda x}.$$

Dies ist der Fall, wenn

$$A \cdot \boldsymbol{c} = \lambda \cdot \boldsymbol{c}$$

ist, also falls λ ein Eigenwert von A ist und $\boldsymbol{c}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Proposition 11.6 *Hat die Matrix A n linear unabhängige Eigenvektoren $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ (zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$), so sind alle Lösungen der Differentialgleichung $\boldsymbol{y}'(x) = A \cdot \boldsymbol{y}(x)$ Linearkombinationen von $\{e^{\lambda_1 x} \cdot \boldsymbol{c}_1, \ldots, e^{\lambda_n x}\boldsymbol{c}_n\}$. Die Voraussetzung ist insbesondere dann erfüllt, wenn A n verschiedene Eigenwerte hat.*

Beweis : An der Stelle $x = 0$ haben die n angegebenen Lösungen die Werte $\{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$. Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen folgt also nach Satz 11.4. Für die zweite Aussage ist zu zeigen, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Dies folgt durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig. Ist

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i, \quad \text{also} \quad 0 = A \cdot 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i c_i.$$

Wir können durch Umnummerieren annehmen, dass $\lambda_n = 0$ ist. Durchmultiplizieren der ersten Gleichung mit λ_n und anschließende Subtraktion ergibt

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n) \cdot c_i = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt für jedes $i \leq n-1$, dass $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_n) = 0$. Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, muss $\alpha_i = 0$ für $i \leq n-1$ sein und dann folgt auch $\alpha_n = 0$. Dies beweist die lineare Unabhängigkeit. □

Im Hinblick auf den allgemeinen Fall betrachten wir das Verhalten einer Lösung $\boldsymbol{y}$ unter einer invertierbaren linearen Abbildung $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Der neue Vektor $\boldsymbol{z} = C\boldsymbol{y}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\boldsymbol{z}'(x) = C \cdot \boldsymbol{y}'(x) = C \cdot A \cdot \boldsymbol{y}(x) = C \cdot A \cdot C^{-1} \cdot \boldsymbol{z}(x).$$

Dies bedeutet umgekehrt, dass falls wir eine Lösung $\boldsymbol{z}(x)$ des linearen Systems mit der transformierten Matrix CAC^{-1} kennen, so kennen wir auch $\boldsymbol{y}(x) = C^{-1} \cdot \boldsymbol{z}(x)$, eine Lösung des ursprünglichen Systems. Durch eine Transformation $A \longrightarrow CAC^{-1}$ lässt sich jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in Jordan-Normalform bringen. Wir behandeln daher im Rest dieses Abschnitts den komplexen Fall.

Sei $J \in D^{r \times r}$ ein Jordankästchen der Länge r zum Eigenwert λ. Die Differentialgleichung $\boldsymbol{y}'(x) = J \cdot \boldsymbol{y}(x)$ bedeutet ausgeschrieben

$$y_r'(x) = \lambda \cdot y_r(x),\ y_{r-1}'(x) = \lambda \cdot y_{r-1}(x) + y_r, \ldots, y_2'(x) = \lambda y_1(x) + y_2.$$

Dies lässt sich leicht sukzessive lösen, man erhält

$$y_r(x) = e^{\lambda x}, y_{r-1}(x) = xe^{\lambda x}, y_{r-2}(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{\lambda x}, \ldots,$$

falls $y_r(x) \neq 0$. Mit $y_r(x) = 0$ erhält man eine weitere Lösung, beginnend mit $y_{r-1}(x) = e^{\lambda x}, y_{r-2}(x) = xe^{\lambda x}$. Insgesamt lassen sich r linear unabhängige Lösungen zusammenfassen als

$$Y_{\lambda,r}(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \frac{1}{2}x^2 e^{\lambda x} & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}x^{r-1}e^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}x^{r-2}e^{\lambda x} \\ 0 & 0 & e^{\lambda x} & \cdots & \frac{1}{(r-3)!}x^{r-3}e^{\lambda x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & e^{\lambda x} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Durch Zusammenfassen der Lösungen der Jordanblöcke und der obigen Basiswechselbeobachtung erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz 11.7 *Sei $\boldsymbol{y}'(x) = A \cdot \boldsymbol{y}(x)$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ein komplexes, homogenes System mit konstanten Koeffizienten. Sei $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix, sodass*

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

in Jordannormalform mit Jordankästchen $J_1, \ldots, J_k$ der Dimension $r_1, \ldots, r_k$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (welche nicht notwendig) verschieden sind. Dann ist

$$Y(x) = C^{-1} \begin{pmatrix} \boxed{Y_{\lambda_1,r_1}(x)} & & & \\ & \boxed{Y_{\lambda_2,r_2}(x)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{Y_{\lambda_k,r_k}(x)} \end{pmatrix}$$

mit $Y_{\lambda_j,r_j}(x)$ wie in (11) ein System von n linear abhängigen Lösungen.

Es gibt noch einen zweiten Ansatz zum Auffinden der Lösungen, in dem man gestattet in Potenzreihen Matrizen einzusetzen. Ist $P = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so definiert man $P(A) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i A^i$. Insbesondere ist für $A = B \cdot x$ (d.h. $a_{ij} = b_{ij} \cdot x$) das Einsetzen definiert als

$$p(B \cdot x) = \sum_{i=1}^{n} c_i (B \cdot x)^i.$$

Daher gilt $\frac{d}{dt} P(B \cdot x) = B \cdot P'(B \cdot x)$.

Sei nun $P = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i X^i$ eine Potenzreihe. Wir wollen auch das Einsetzen von Matrizen als Grenzwert der Partialsummen definieren. Dazu versehen wir den Vektorraum $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ mit einer Norm. Obwohl alle Normen äquivalent sind, ist es rechentechnisch günstig eine *erträgliche* Norm zu wählen, d.h. sodass $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$ gilt. Die Supremumsnorm $\|A\| = \max\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ hat diese Eigenschaft.
Hat also P den Konvergenzradius r, so definieren wir für Matrizen A mit $\|A\| = s < r$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i := \lim_{k\to 0} \sum_{i=0}^{k} c_i A^i.$$

Dieser Limes existiert und die Reihe ist absolut konvergent, denn

$$\sum_{i=0}^{k} |c_i| \left\|A^i\right\| \leqslant \sum_{i=0}^{k} |c_i| \, \|A\|^i = \sum_{i=0}^{k} |c_i| \cdot s^i$$

und nach Definition des Konvergenzradius ist der Limes hiervon für $k \to \infty$ existent und ist endlich.
Also ist

$$P(Bx) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (B \cdot x)^i$$

für $|x| < x_0 = \frac{r}{\|A\|}$ absolut konvergent und lokal gleichmäßig konvergent. Folglich kann man Ableitung und Summation vertauschen und erhält

$$\frac{d}{dx} P(Bx) = B \cdot P'(B \cdot x).$$

Wir spezialisieren nun auf die Exponentialreihe. Diese konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ und es gilt

$$(e^{A\cdot x})' = A \cdot e^{A\cdot x}$$

nach der oben hergeleiteten Ableitungsregel. Also ist e^{Ax} eine Lösung der Differentialgleichung $\boldsymbol{y}'(x) = A \cdot \boldsymbol{y}(x)$. Zum Vergleich mit der im Satz beschriebenen Lösung genügt es, den Fall $A = J_r$ eines Jordankästchens zum Eigenwert λ zu betrachten. Man rechnet leicht nach, dass $Y_{\lambda,r}(x) = e^{I_r \cdot x}$ ist, wie es nach dem Eindeutigkeitssatz auch sein musste.

11.6 Singularitäten

Wir interessieren uns nun für holomorphe Lösungen der Differentialgleichungen $\boldsymbol{y}'(z) = A(z) \cdot \boldsymbol{y}(z)$, wobei $A(z)$ an einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Singularität besitzt, d.h. $A(z)$ ist holomorph auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Durch die Verschiebung $z \longmapsto z_0$ können wir immer annehmen, dass 0 die Singularität ist.

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(z) = \frac{c}{z} \cdot y(z)$ für $c \in \mathbb{C}$, welche vom oben genannten Typ ist. Formal ist $y(z) = z^c$ eine Lösung. Für $c \in \mathbb{Z}$ ist dies eine Lösung auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $c = \frac{1}{3}$ sei $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$. Dann sind $y_i(z) = \zeta_3^i \cdot \sqrt[3]{z}$ Lösungen. Allgemeiner ist für $c \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ die Lösung auf G holomorph, aber vieldeutig. Und für $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, insbesondere $c \notin \mathbb{R}$? Wir haben im Abschnitt Funktionentheorie weder allgemeine komplexe Potenz noch die Logarithmusfunktion ausführlich diskutiert und fassen dies kurz zusammen.
Auf jedem sternförmigen Gebiet, das Null nicht enthält, also z.B. $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqq 0}$, kann man den Logarithmus definieren durch

$$\log(z) = \int_1^z \frac{dt}{t}.$$

Diesen Definitionsbereich kann man nicht vergrößern, denn es gilt für $c \in \mathbb{R}_{<0}$ nach Lemma 6.1

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} \log(z) - \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} \log(z) = 2\pi i.$$

Es ist $e^{\log(z)} = z$, wie man durch Ableiten leicht nachprüft.

Damit kann man nun die allgemeine Potenz erklären als

$$z^c := e^{c \log(z)},$$

aber eben nur dort, wo eine Logarithmusfunktion definiert ist, also z.B. auf $B_1(0) \cap \mathbb{C}^-$. Es gibt in der Tat keine Lösung der Differentialgleichung für $c \notin \mathbb{Z}$, denn auf $B_1(0) \cap \mathbb{C}^-$ ist die Lösung z^c die Einzige nach den Eindeutigkeitssätzen, aber für $z_0 \in \mathbb{C}^-$ ist

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} z^c / \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} z^c = e^{c \cdot 2\pi i} \neq 1.$$

Andererseits kann man auf der sternförmigen Menge $\mathbb{C}^+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ durch $\widetilde{\log}(z) = \int_{-1}^{z} \frac{dt}{t}$ ebenfalls einen Logarithmus definieren. Auf $\mathbb{H}$ unterscheiden sich $\log(z)$ und $\widetilde{\log}(z)$ nur durch eine additive Konstante. Mittels $B_1(0) \cap \mathbb{C}^+$ und

$B_1(0) \cap \mathbb{C}^-$ hat man $B_1(0) \setminus \{0\}$ überdeckt und auf jeder der zwei offenen Mengen eine Lösung der Differentialgleichung gefunden. Man sagt $e^{c\log(z)}$ ist eine *mehrwertige* Lösung der Differentialgleichung auf der ganzen Umgebung $B_1(0) \setminus \{0\}$. Solche mehrwertigen Funktionen sind Grundlage des Konzepts, das Riemann als „Überlagerungsflächen" (heutzutage *Riemannsche Flächen* genannt) formuliert hat.

Auch in Systemen vom Rang größer 1 funktioniert das gleiche Prinzip. Die Differentialgleichung

$$\boldsymbol{y}'(z) = \frac{A}{Z} \cdot \boldsymbol{y}(z)$$

hat die Lösung

$$\boldsymbol{y}(z) = z^A := e^{A\cdot\log(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \left(\log(z)\right)^k}{k!}$$

auf $\mathbb{C}^+$ oder $\mathbb{C}^-$, wobei man den Zweig $\log(z)$ oder $\widetilde{\log}(z)$ des Logarithmus entsprechend wählt.

Der folgende Satz sagt, dass die Beispiele repräsentativ sind, d.h. dass sich Lösungen an singulären Punkten stets aus holomorphen Funktionen und einer allgemeinen Potenz schreiben.

Satz 11.8 *Ist $A(z)$ auf $B_r(0) \setminus \{0\}$ holomorph, so hat die Differentialgleichung $\boldsymbol{y}'(z) = A(z) \cdot \boldsymbol{y}(z)$ eine Basis von Lösungen der Form $y_1(z), \ldots, y_n(z)$, wobei*

$$Y(z) = (y_1(z), \ldots, y_n(z)) = U(z) \cdot z^B.$$

Dabei ist $U(z)$ auf $B_r(0) \setminus \{0\}$ holomorph und B eine konstante Matrix.

Beweis : Wir nehmen an, $y_1(z), \ldots, y_n(z)$ seien Lösungen und setzen $W(s) = Y(e^s)$. Dann gilt

$$\frac{d}{ds} W(s) = e^s A(e^s) \cdot W(s).$$

Da A auf dem Bild der Exponentialfunktion holomorph ist, hat die Differentialgleichung $\boldsymbol{w}'(s) = e^s A(e^s) \cdot \boldsymbol{w}(s)$ auf $B_{\log(s)}(0)$ eine Basis von Lösungen $w_1(s), \ldots, w_n(s)$, die wir zu einer Matrix $W(s)$ zusammenfassen. Nun ist $e^s A(e^s)$ periodisch mit Periode $2\pi i$, d.h. $W(s + 2\pi i)$ enthält wieder eine Basis von Lösungen. Also gibt es eine invertierbare Matrix C mit

$$W(s + 2\pi i) = W(s) \cdot C.$$

Der wesentliche Hilfssatz untenstehend zeigt die Existenz einer Matrix B mit der Eigenschaft $e^{2\pi i B} = C$. Für $T(s) = W(s) \cdot e^{-Bs}$ gilt dann

$$T(s + 2\pi i) = W(s + 2\pi i) \cdot e^{-B(s+2\pi i)} = W(s) \cdot e^{2\pi i B} \cdot e^{-B(s+2\pi i)} = T(s).$$

Also ist $U(z) = T(\log(z))$ eine auf ganz $B_r(0)$ definierte holomorphe matrixwertige Funktion. Schließlich ist

$$Y(z) = W(\log z) = T(\log(z))\, e^{B\log(z)} = T(\log(z))\, z^B$$

von der gewünschten Gestalt. $\square$

Lemma 11.9 *Ist $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär, so gibt es eine Matrix B mit $e^B = C$.*

Beweis : Im ersten Schritt nehmen wir an, es sei $C = E + R$ mit $\|R\| \leq 1/3$. Wir betrachten den Operator

$$S(X) = X + E + R - e^X.$$

Ein Fixpunkt B dieses Operators ist eine Matrix der gewünschten Eigenschaft $e^B = C$. Wir zeigen, dass S die Menge $K = \{X \in \mathbb{C}^{n\times n} : \|X\| \leq 2/3\}$ in sich abbildet und kontrahierend ist. Ist $\|X\| \leq \alpha = 2/3$, so ist

$$\|S(X)\| = \left\| R - \left(\frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots\right)\right\| \leqslant \frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots = e^\alpha - 1 - \alpha + \frac{1}{3} < \frac{2}{3}.$$

Aus Zerlegungen der Bauart

$$X^3 - Y^3 = X^2(X-Y) + X(X-Y)Y + (X-Y)Y^2$$

zeigt man für $X, Y \in K$, dass $\|X^3 - Y^3\| \leq 3\alpha^2 \|X - Y\|$ gilt, allgemein $\|X^k - Y^k\| \leq k\alpha^{k-1}\|X - Y\|$.
Daraus folgt

$$\|S(X) - S(Y)\| = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{X^k - Y^k}{k!} \right\| \leqslant \|X - Y\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\alpha^{k-1}}{k!} = \|X - Y\| (e^\alpha - 1) < \|X - Y\|.$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun der erste Fall.
Der allgemeine Fall folgt durch Konjugation auf Jordan-Normalform. $\square$