GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

4. Übungsblatt (erschienen am 6.5.2024)

Aufgabe 4.1 (Votieraufgabe)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $\nabla f(x) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie: $\bar{d} = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} r$ ist die eindeutige Lösung des Problems

$$\min_{\|d\| \leq r} \nabla f(x)^\intercal d,\ d \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Diese definiert auf dem $\mathbb{R}^n$ durch $\|s\|_A := \sqrt{s^\intercal A s}$ die **A-Norm**. Bestimmen Sie die Lösung des Problems

$$\min_{\|d\|_A \leq r} \nabla f(x)^\intercal d,\ d \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 4.2 (Multiple Choice)[2 Punkte]
In dieser Aufgabe sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stets eine stetig differenzierbare Funktion.

(a) $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann stationärer Punkt von f, wenn $\nabla f(x^*)^T h \leq 0\ \forall h \in \mathbb{R}^n$ gilt.
wahr ☐ falsch ☐

(b) Jede Abstiegsrichtung d im Punkt x erfüllt $d = -\lambda \nabla f(x)$ mit einem $\lambda > 0$.
wahr ☐ falsch ☐

(c) Das Gradientenverfahren mit Armijo-Regel terminiert endlich oder erzeugt eine Folge, die mindestens einen Häufungspunkt besitzt.
wahr ☐ falsch ☐

(d) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\nabla f(x_0) \neq 0$. Weil der negative Gradient eine Abstiegsrichtung ist, gilt für $x_1 := x_0 - \nabla f(x_0)$: $f(x_1) < f(x_0)$.
wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 4.3 (schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit global Lipschitz-stetiger Ableitung, d.h. es existiere ein $L > 0$, sodass gilt:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten nun ein modifiziertes Gradientenverfahren analog zu Algorithmus 2. Dabei wird jedoch die Schrittweite s_k nicht über die Armijo-Regel bestimmt, sondern stattdessen $s_k = \alpha_k$ gewählt mit

$$\varepsilon \leq \alpha_k \leq \frac{1-\varepsilon}{L}.$$

Dabei ist $0 < \varepsilon < \frac{1}{1+L}$ eine über den gesamten Algorithmus feste Konstante.

(a) Zeigen Sie, dass, falls der Algorithmus im k-ten Schritt noch nicht terminiert hat (also $\nabla f(x_i) \neq 0$ für alle $i \leq k$) gilt:
$$f(x_{k+1}) < f(x_k).$$

(b) Beweisen Sie, dass der so modifizierte Algorithmus entweder nach endlich vielen Schritten an einem stationären Punkt x_k terminiert oder eine unendliche Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erzeugt, deren Häufungspunkte stationäre Punkte sind.

Aufgabe 4.4 (Programmieraufgabe)[5 Punkte]
Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
function [z,fz] = Gradient_mit_Armijo(f,∇f,z0,β,γ)
```

welche das Gradientenverfahen mit der Armijo-Schrittweitenregel aus der Vorlesung realisiert (vgl. Algorithmus 2). Wenden Sie ihre Funktion auf $f(x, y) = x^2 + y^2 + (\sin(x) + \cos(x))^2$ an. Benutzen Sie $z_0 = [5, 5]$, $\beta = 0.5$ und $\gamma = 0.01$. Dabei soll die Iteration abbrechen, sobald $\|\nabla f(x_k, y_k)\| \leq 10^{-8}$ gilt. Bezeichne n den Abbruchindex, d.h.

$$n = \min\{k \geq 0 \ : \ \|\nabla f(x_k, y_k)\| \leq 10^{-8}\|\}.$$

Plotten Sie $log\,(\|(x_k - x_n, y_k - y_n)\|)\; k = 1, ..., n-1$ gegen $1 : n-1$.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 13.5.2024 um 14:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist ein kommentierter `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**. Es gibt jeweils +0.5 Punkte für richtig angekreuzte Antworten und −0.5 Punkt für jedes falsch gesetzte Kreuz. Die Mindestpunktzahl von 0 Punkten kann nicht unterschritten werden.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**