GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 24.04.2024)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $U \in C^{(0)}(G)$ besitze die Eigenschaften des Gaußschen Mittelwert-Satzes, d.h. für jedes $x_0 \in G$ und $R > 0$ mit $\overline{B_R(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| \leq R\} \subseteq G$ erfülle die Funktion U

$$U(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x-x_0|=R} U(x)\, d\omega(x)$$

oder

$$U(x_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{|x-x_0|\leq R} U(x)\, dx.$$

Zeigen Sie, dass unter diesen Bedingungen U harmonisch in G ist.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)
Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $(U_k)_{k=0,1,\ldots}$ eine Folge von Funktionen, die harmonisch in G sind.

(a) Beweisen Sie, dass wenn $\lim_{k\to\infty} U_k(x)$ gleichmäßig gegen $U(x)$ auf jeder Kugel $\overline{B_R(x_0)} \subseteq G$ konvergiert, U harmonisch in G ist.

(b) Angenommen, die Funktionen U_k, $k = 0, 1, \ldots$, sind stetig auf $\overline{G}$ und konvergieren gleichmäßig auf ∂G. Zeigen Sie, dass die Folge gleichmäßig auf $\overline{G}$ konvergiert und, dass ihr Grenzwert harmonisch ist.

Aufgabe 2.3 (Schriftliche Aufgabe)
Betrachten Sie das Polynom $P_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vom Grad 2

$$P_2(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + b x_1 x_2 + c x_2 x_3 + d x_1 x_3.$$

Bestimmen Sie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an die Koeffizienten die sicherstellen, dass P_2 ein harmonisches Polynom wird.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** kann eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden. Die Abgabe soll bis zum 10.05.2024 um 14:00 Uhr in Fach 17 in der Robert-Mayer Straße 6-8 erfolgen. Es darf in Zweiergruppen abgegeben werden.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.