Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2024/25
Prof. Dr. Bastian von Harrach-Sammet
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

2. Übungsblatt (erschienen am 22.4.2024)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Gegeben sei die skalare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$. Berechnen Sie die quadratische Taylorapproximation in einem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2.2 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie: Wenn x^* ein lokales aber kein globales Minimum von f ist, dann besitzt f neben x^* einen weiteren stationären Punkt.

(b) Gilt die Aussage aus Aufgabenteil (a) auch im Mehrdimensionalen? Betrachten Sie hierzu die Funktion $f(x, y) = e^{3y} - 3xe^y + x^3$.

Hinweis: Wir nennen einen Punkt x^* stationär, falls $\nabla f(x^*) = \big(0, \ldots, 0\big)^T$ (vgl. Definition 2.10 im Skript).

Aufgabe 2.3 (Votieraufgabe)
Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie: Falls A invertierbar ist, gilt für die Kondition der induzierten Matrixnorm, dass

$$\kappa(A) := \|A\|_{\text{ind}} \, \left\|A^{-1}\right\|_{\text{ind}} = \frac{\sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}}{\inf\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}}.$$

Aufgabe 2.4 (Multiple Choice)[2 Punkte]
differenzierbare Funktion.

(a) Die Bedingung $\mathrm{Rg}(A) = n$ auf Blatt 1 Aufgabe 1.2(b) ist notwendig für die Eindeutigkeit der Lösung. wahr ☐ falsch ☐

(b) Die Bedingung $\mathrm{Rg}(A) = n$ auf Blatt 1 Aufgabe 1.2(b) ist notwendig für die Existenz der Lösung. wahr ☐ falsch ☐

(c) Für die Kondition einer invetierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt stets: $\kappa(A) \geq 1$. wahr ☐ falsch ☐

(d) Für die Kondition zweier invetierbaren Matritzen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt stets: $\kappa(AB) = \kappa(A)\kappa(B)$. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 2.5 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Folgender Algorithmus dient der Berechnung von lokalen Minima einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

Gegeben seien ein Ausgangspunkt z_0, eine Schrittweite h, eine Toleranz ε und Suchrichtungen

$$d \in \{e_1, -e_1, e_2, -e_2, ..., e_n, -e_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

wobei e_i den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Gehe immer vom aktuellen Ausgangspunkt einen Schritt mit Schrittweite h in jede Suchrichtung und bestimme den dortigen Funktionswert. Ebenso berechne den Funktionswert am aktuellen Ausgangspunkt. Stimmt der kleinste dieser $2n+1$ Funktionswerte mit dem Wert am Ausgangspunkt überein, so halbiere die Schrittweite und fahre fort. Andernfalls wähle das Argument des kleinsten Funktionswertes als neuen Ausgangspunkt und fahre mit der alten Schrittweite fort. Wiederhole den Vorgang, bis die Schrittweite kleiner als die Toleranz ε ist.

Implementieren Sie den Algorithmus in einer MATLAB-Funktion

```
function [z,fz] = Minimum(f, z0, h, ε).
```

Testen Sie ihre Funktion, indem Sie die Koordinaten $(z, f(z))$ der lokalen Minima folgender Funktionen bestimmen (geben Sie das Ergebnis auskommentiert im Quellcode an):

(a) $f_1(x,y) = \frac{1}{6}x^2 + y^2 + \frac{1}{4}x + 1$. Verwenden Sie $z_0 = (-10, 10)$, $h = 1$ und $\varepsilon = 0.01$.

(b) $f_2(x,y) = \frac{1}{4}(x^4y^2+x^4)-x^3y^2-x^3+xy^2+x+5y^2+5$. Verwenden Sie $z_{0,1} = (0,5)$ und $z_{0,2} = (0.5, 5)$, $h = 1$ und $\varepsilon = 0.01$.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** und **Programmieraufgaben** * soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 29.4.2024 um 14:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**. Es gibt jeweils $+0.5$ Punkte für richtig angekreuzte Antworten und -0.5 Punkt für jedes falsch gesetzte Kreuz. Die Mindestpunktzahl von 0 Punkten kann nicht unterschritten werden.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**