Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2024/25
Prof. Dr. Bastian von Harrach-Sammet
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

1. Übungsblatt (erschienen am 16.4.2024)

Aufgabe 1.1 (Votieraufgabe)
Gegeben sei eine Menge von n Punkten in der Ebene. Zu finden sei eine Kreisscheibe mit minimalem Radius, die alle diese Punkte enthält.

(a) Formulieren Sie dieses Problem als restringiertes Optimierungsproblem mit linearer Zielfunktion und quadratischen Nebenbedingungen.

(b) Beweisen Sie, dass dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 1.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

(a) Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

(i) $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ löst das *lineare Ausgleichsproblem*

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2.$$

(ii) $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ löst die *Gaußsche Normalengleichung*

$$A^\intercal Ax = A^\intercal b.$$

(b) Es gelte nun $Rang(A) = n$. Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ aus Aufgabenteil **(a)**.

Aufgabe 1.3 (Votieraufgabe)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x_0, x_1 \in U$. Zu $t \in \mathbb{R}$ sei $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ und es gelte $[x_0, x_1] := \{x_t : t \in [0,1]\} \subset U$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion

$$g : t \mapsto f(x_t)$$

ist auf einer Umgebung von $[0,1]$ stetig differenzierbar und es gilt

$$g'(t) = \nabla f(x_t)^\intercal (x_1 - x_0).$$

(b) Ist f zweimal stetig differenzierbar, dann ist auch g zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$g''(t) = (x_1 - x_0)^\intercal \nabla^2 f(x_t)(x_1 - x_0),$$

mit der Hesse-Matrix $\nabla^2 f$.

Aufgabe 1.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Wir interessieren uns für das Minimalflächenproblem, vgl. Kapitel 1.3.1 der Vorlesung.

Dazu betrachten wir $\Omega := [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ und diskretisieren Ω durch ein äquidistantes Punktegitter mit der Schrittweite $h = 1/(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, sodass die Koordinaten der $N := n^2$ Punkte gegeben sind durch $x_{i+(j-1)n} := ((i-1)h, (j-1)h) \in \Omega$, $i, j = 1, \ldots, n$, vgl. Abbildung 1. Die so entstehenden Quadrate werden entsprechen Abbildung 1 halbiert, wodurch wir eine Triangulierung aus $2(n-1)^2$ Dreiecken erhalten.

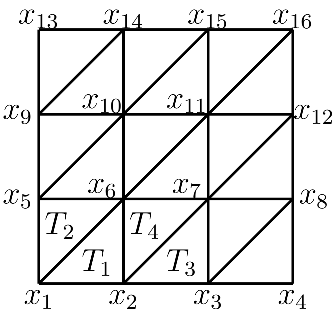

Abbildung 1: Die Triangulierung für $n = 4$.

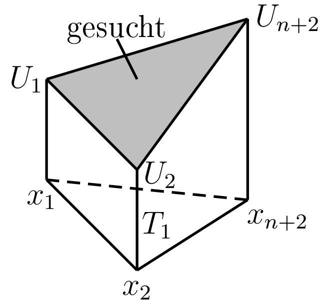

Abbildung 2: Beispiel der gesuchen Fläche des Graphen (grau) für T_1.

Wir approximieren die in Kapitel 1.3.1 der Vorlesung gesuchte Funktion u durch einen Vektor $U = (U_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ von Funktionsauswertungen $U_i = u(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$ und interessieren uns für den Flächeninhalt $A(U)$ des Graphen der zugehörigen stetigen und stückweise linearen Funktionen, vgl. Abbildung 2.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [A] = Inhalt(U, n)
```

welche zu einem gegebenen Vektor $U \in \mathbb{R}^N$ von Funktionswerten den Flächeninhalt $A(U)$ des zugehörigen Graphen bestimmt.

(b) Testen Sie ihre Funktion am Beispiel $n = 6$ und $U = \mathbb{1} \in \mathbb{R}^N$, sowie $n = 4$ und $U = (0,1,2,3,1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6)$. Veranschaulichen Sie die Flächen graphisch.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** und **Programmieraufgaben** * soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 22.4.2024 um 14:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__