Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2023/24
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Johannes Wagner, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

**Weihnachtsblatt (erschienen am 19.12.2023)**

**Aufgabe 10.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]**
Beweisen Sie Satz 2.25 aus der Vorlesung: Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $A^+ \in \mathbb{C}^{n\times m}$ die Moore-Penrose Inverse.

(a) $\mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$, $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$.

(b) $A^+$ erfüllt die Moore-Penrose Axiome

$$AA^+A = A, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^* = A^+A.$$

(c) $A^+$ besitzt die Singulärwertzerlegung

$$A^+u_j = \sigma_j^{-1}v_j, \quad (A^+)^*v_j = \sigma_j^{-1}u_j.$$

**Aufgabe 10.2 (Votieraufgabe)**
Betrachten Sie das lineare Ausgleichsproblem

$$\text{minimiere } \|Ax - b\|_2 \tag{1}$$

mit einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{C}^m$. Für ein $\rho_k > 0$ sei $x_k$ die Lösung der regularisierten Normalengleichung

$$(A^*A + \rho_k I)x = A^*b.$$

Zeigen Sie, dass $A^*A + \rho_k I$ für jedes $\rho_k > 0$ invertierbar ist und dass für jede Folge $(\rho_k)_k \in \mathbb{N}$ mit $\rho_k \to 0$, die zugehörigen Lösungen $x_k$ gegen $A^+b$ konvergieren.

**Aufgabe 10.3 (Rettet den Weihnachtsbaum - Programmieraufgabe)[6 Punkte]**
Die Datei „Weihnachtsbaum.mat“ enthält eine Matrix `A` und einen Vektor `y`, der `MATLAB`-Befehl `load` lädt diese Variablen in Ihre `MATLAB` Sitzung. Betrachten Sie nun das folgende Problem:

*Oh nein! Der Weihnachtsbaum wurde von der hinterlistigen Matrix $A$ verwischt und ist nun im Vektor $y$ gefangen. Aber bald ist Weihnachten! Können wir den Baum noch retten?*

**Versuchen Sie den Weihnachtsbaum zu retten!** Lösen Sie dazu das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_x \|Ax - y\|.$$

Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Invertieren Sie zunächst $A^*A$ explizit mit dem Befehl `inv` und lösen Sie damit die Gaußschen Normalengleichungen und speichern Sie das Ergebnis in der Variable `x_GNG`

(ii) Lösen Sie als nächstes die Gaußschen Normalengleichungen mit dem \-Operator und speichern Sie das Ergebnis in der Variable `x_GNG2`

(iii) Implementieren Sie die `MATLAB`-Funktion `[b,R] = QR_decomp(A,b)`, die die Q-freie QR-Zerlegung einer injektiven Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ realisiert und lösen Sie damit das lineare Ausgleichsproblem. Speichern Sie Ihr Ergebnis in der Variable `x_QR`

Ihre Ergebnisse werden mithilfe der Funktion `male_Baum` als Bild dargestellt. Gelingt es Ihnen den Weihnachtsbaum zu befreien?

# Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 09.01.2024 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.

- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 09.01.2024 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den `MATLAB`-Grader einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.