

7. Übungsblatt (erschienen am 28.11.2023)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm in \mathbb{C}^n . Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\|A\|_{\text{ind}} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

wird eine Matrixnorm in $\mathbb{C}^{n \times n}$, die sogenannte *induzierte Norm* definiert.

(b) Die induzierte Norm ist mit der Ausgangsnorm verträglich und submultiplikativ (Definition 2.7).

(c) Für jede andere mit der Ausgangsnorm verträgliche Norm $\|\cdot\|_{\text{vertr}}$ in $\mathbb{C}^{n \times n}$ gilt

$$\|A\|_{\text{ind}} \leq \|A\|_{\text{vertr}} \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Aufgabe 7.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Zeigen Sie:

(a) Die Spaltensummennorm ist die durch die Betragssummennorm induzierte Norm.

(b) Die Zeilensummennorm ist die durch die Maximumsnorm induzierte Norm.

(c) Die Frobeniusnorm ist mit der Euklid-Norm verträglich, jedoch wird die Frobeniusnorm nicht durch die Euklid-Norm induziert.

(d) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ reguläre Matrizen und $\|\cdot\|_M$ eine Matrixnorm. Zeigen Sie:

(i) $\text{cond}_M(AB) \leq \text{cond}_M(A) \cdot \text{cond}_M(B)$ für jede submultiplikative Matrixnorm.

(ii) $\text{cond}_M(cA) = \text{cond}_M(A)$ für alle $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 7.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Implementieren Sie die LR-Zerlegung mit Zeilenpivotsuche. Anders als bei der Spaltenpivotsuche (Algorithmus 2 im Skript) soll, falls das Pivotelement im j -ten Schritt 0 ist, die j -te Zeile nach einem Nicht-Nullelement durchsucht werden und anschließend eine entsprechende Spaltenvertauschung durchgeführt werden.

Speziell soll die Funktion den Aufbau $[P, L, R] = \text{LR_decomp}(A)$ haben, wobei

$$AP = LR.$$

Implementieren Sie außerdem die Funktion $x = \text{LGS_loeser}(A, b)$, die mithilfe $\text{LR_decomp}(A)$ und Vorwärts- Rückwärtssubstitution das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

Falls A nicht invertierbar ist, soll $\text{LR_decomp}(A)$ die Ausgabe $[P, L, R] = [\text{nan}, \text{nan}, \text{nan}]$ und $\text{LGS_loeser}(A, b)$ die Ausgabe $x = \text{nan}$ liefern.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 05.12.2023 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.
- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 05.12.2023 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den **MATLAB-Grader** einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.