

6. Übungsblatt (erschienen am 21.11.2023)

Aufgabe 6.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

(a) Gegeben sei eine Bandmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Bandbreite $l \in \mathbb{N}$, das heißt

$$a_{ij} = 0, \text{ für alle } i, j \leq n \text{ mit } |i - j| > l.$$

Angenommen die LR-Zerlegung ohne Pivotsuche (Algorithmus 1 im Skript) angewandt auf A gibt keine Fehlermeldung, das Pivotelement ist also immer ungleich 0. Weisen Sie nach, dass in diesem Fall die Faktoren L und R der LR-Zerlegung von A ebenfalls Bandbreite l haben. Wie muss Algorithmus 1 aus der Vorlesung abgeändert werden, damit die LR-Zerlegung einer Bandmatrix mit Bandbreite l nur noch $l^2 n$ Multiplikationen bzw. Divisionen benötigt?

(b) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt strikt diagonaldominant, falls

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass für eine strikt diagonaldominante Matrix A die Pivotelemente stets ungleich 0 sind, also $a_{jj}^{(j)} \neq 0$.

Aufgabe 6.2 (Votieraufgabe)

Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 6 \\ -4 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

von Hand die LR-Zerlegung.

Aufgabe 6.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Implementieren Sie die Funktion `[L,R] = LR_decomp(A)`, die die LR-Zerlegung ohne Pivotsuche berechnet, sowie die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution. Falls während der Berechnung ein Pivotelement 0 ist, soll der Algorithmus terminieren und als Ausgabe `[L,R]=[nan,nan]` liefern.

Testen Sie das Verfahren anhand der Gleichungssysteme $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 6 \\ -4 & -5 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen und interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 28.11.2023 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.
- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 28.11.2023 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den **MATLAB-Grader** einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.