Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2023
10. April 2023

Seminar
Prof. Dr. Martin Möller

Seminar

Kugelpackungen in Dimension 8 und 24

Sommersemester 2023

15.-18.Juni

Ziel des Seminars ist, die dichtesten Kugelpackungen in Dimension 8 und 24 zu finden und zu erklären, warum diese Dimensionen speziell sind. Einen Überblick hierzu geben die Artikel [Coh17] und [Coh22]. Der Start des Seminars ist ein Überblick über spezielle Gitter, Wurzelgitter und das Leech-Gitter, die in vielen Bereichen der Mathematik auftreten, darunter Codes, algebraische Gruppe oder Liegruppen oder Spiegelungsgruppen.

Das Seminar setzt Grundkenntnisse über Modulformen voraus, wie sie zum Beispiel in [KK07] oder [BGHZ08] oder dem Skript zur Vorlesung Modulformen (SoSe 23, GU Frankfurt) zu finden sind.

Die mit 'optional' gekennzeichneten Vorträge werden erst vergeben, wenn die anderen, zum Primärziel unbedingt notwendigen Vorträge, bereits vergeben sind.

1. **Codes und Wurzelgitter I** (60 min) N.N

   Motivation des Studiums spezieller Gitter durch Codes. In diesem Vortrag kommt bereits ein Gitter vor, das eine optimale Kugelpackung liefern wird, das E_8-Gitter.

   Ganz knappe Einführung von linearen (!) fehlerkorrigierenden Codes, Hamming-Distanz, Hamming-Code, erweiterten Hamming-Code ([Ebe13, Kapitel 1.2]), der zugehörigen Gitter inklusive der Begriffe 'gerade' und 'unimodular' so wie das E_8-Gitter Coxeter-Diagramm zu einer Gitterbasis ([Ebe13, Kapitel 1.3]). Der größte Teil des Vortrags ist der Definition von Wurzelgittern und dem Beweis des Satzes von Witt ([Ebe13, Theorem 1.1 in Kapitel 1.4]) über spezielle Basen in Wurzelgittern gewidmet. Beweis: Konstruktion eines Fundamentalsystems (Proposition 1.4 und Beweise der zugehörigen Lemmata).

   Mit Vortrag 2 evtl. absprechen und evtl. Teile tauschen. Der Zusammenhang von Wurzelgittern mit Liegruppen wird in der Vorlesung im WiSe 2023/24 behandelt.

   Literatur: [Ebe13], evtl. auch [CS93, Chapter 4].

2. **Wurzelgitter II: Klassifikation** (60 min) N.N

   Ziel des Vortrags ist die Klassifikation von Wurzelgittern durch Coxeter-Dynkin-Diagramme, d.h. vollständige Liste und Existenzaussagen. (Außer dem E_8-Gitter gibt keines davon bekanntermaßen eine optimale Kugelpackung, aber einige davon geben sehr gute bzw. beste bekannte Kugelpackungen.)

   Diskussion der möglichen Coxeter-Diagramme zu den speziellen Basen und Existenz eines Gitters zu den Coxeter-Dynkin-Diagrammen ([Ebe13, Kapitel 1.4]), d.h. Konstruktion der Gitter A_n, D_n, E_6, E_7, E_8. Definition der Weyl-Gruppe und Transitivität. ([Ebe13, Proposition 1.6] und der Rest des Abschnitts wird nicht benötigt.)

   Literatur: [Ebe13], evtl. auch [CS93, Chapter 4], .

3. **Spezielle Gitter III: Golay-Code und Leech-Gitter** (60 min) N.N.

   In diesen beiden Vorträgen wird eine der viele Definitionen des Leech-Gitter gegeben. Dieses Gitter wird die optimale Kugelpackung in Dimension 24 liefern. Es ist keine Wurzelgitter, aber eng damit verwandt. Für die Charakterisierung zählen wir kurze Gittervektoren bzw. suchen Codes mit großen Minimaldistanzen. Diese sind aus den Thetafunktionen zu Gittern ablesbar und die Vorträge starten mit einer Zusammenfassung davon.

   Die folgenden Aufgaben sind für *Vortrag 3 und Vortrag 4*:

   Wiederholung (ganz kurz!) von Thetafunktionen zu Gitter aus der Vorlesung Modulformen und der Eindeutigkeit von E_8 als unimodularem Gitter. Zusammenfassung der Gewichtspolynome zu Gittern [Ebe13, Abschnitt 2.7] soweit für den folgenden Abschnitt notwendig.

   Grundlegendes über Designs und Steinersysteme. (Möglicherweise die Trennung der Vorträge bei [Ebe13, Definition, S. 57]?) Existenz (und knapp: Eindeutigkeit) eines geraden selbstdualen [24,12,8]-Codes. ([Ebe13, Theorem 2.6])

   Mit Hilfe dessen: Konstruktion eines geraden unimodularen Gitters in Dimension 24 ohne Wurzeln, das Leech-Gitter, also grob in[Ebe13] von S. 58 ("We now show the existence of such a code ...") bis S. 59 ("In order to show the uniqueness of the Golay code, ...") und von S. 60 "We have already seen that the Hamming weight ...") bis S. 62 "The MacWilliams Identity and Gleason's Theorem", also Kapitel 2.9)

   Literatur: [Ebe13], [CS93, Chapter 7].

4. **Spezielle Gitter IV: Leech-Gitter** (60 min) N.N.

   Mit Vortrag 3 die Aufgabenteilung des oben genannten Pflichtprogramms absprechen.

   Optional sind alternative Characterisierungen des Leech-Gitters aus [CS93, Chapter 7] sowie Eigenschaften der Mathieu-Gruppe M_{24}

   Literatur: [Ebe13], [CS93, Chapter 7].

5. **Kugelpackungen: Ein Überblick** (60 min) N.N

Der Vortrag stellt das zentrale Optimierungsproblem vor, die Bestimmung dichtester Kugelpackungen. Evt. Zusammenhang mit der Minimaldistanz fehlerkorrigierender Codes erwähnen.

(Allgemeine/periodisch/Gitter-) Packungen definieren. Packungsdichte (evtl. auch 'kissing number') definieren und zeigen, dass die Packungsdichte jedes Gitters durch periodische Gitter aproximiert werden kann ([CE03, Appendix A]). Packungsdichte (evtl. auch 'kissing number') für einige spezielle Gitter berechnen, z.B. A_n-Gitter, E_8-Gitter und Leech-Gitter. In [CS93, Chapter 1] gibt es eine Zusammenstellung der Fakten und Rekordhalter (mit [Coh17] und [Coh22] und den Quellen dort vergleichen, ob das noch aktuell ist. Für E_8 und Leech wird die Packungsdichte auch dort berechnet. Ein Auswahl aus den Rechnung in [CS93] treffen. Ggf. auch die Thetafunktionen zu den Gitter vorstellen und Vortrag 3 ergänzen.

Literatur: [CS93, Chapter 1, Chapter 4.6 und 4.8, Chapter 5], .

6. **Optional: Kugelpackungen in niedriger Dimension** (60 min) N.N

Der Vortrag gibt eine Rückschau auf die bekannten Resultate in niedriger Dimension.

Beste Packungsdichten in Dimension 2 und 3 berechnen: Für Dimension 2 z.B. in [Lás72, S. 58-61]. Für Dimension 3 den algemeinen Fall erwähnen (die Kepler-Vermutung, bewiesen in [Hal05] mit massiver Computerunterstützung), aber auf den Fall von Gitterpackungen einschränken (Originalbeweis in [Gau31], moderner Beweis z.B. in [Cas97, Chapter II, Thm. III]. Erklären, warum die dichteste Packung in Dimension 3 nicht eindeutig ist ([CS93, Chapter 1]).

Literatur: [Lás72], [Gau31], [Cas97], [CS93].

7. **Schranken mittels linearer Optimierung** (60 min) N.N.

Die Methode von Cohn-Elkies zur Abschätzung der Packungsdichte basiert auf Fouriertransformation. Die notwendigen Grundlagen aus der Analysis sollen hier bereitgestellt werden. Die Abschätzung kann grob oder scharf sein, je nach dem ob die 'magische Funktion' mit geeigneten Eigenschaften an die Nullstellen und die der Fouriertransformierten existiert.

Zusammenfassung der Funktionalanalysis-Grundlagen: Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^n$, Beweis der Poisson-Formel für beliebige Gitter, 'zulässige' Funktionen, sodass diese Formel gilt.

Ziel ist die obere Schranke für die Packungsdichte in Abhängigkeit von einer 'zulässigen Funktion' f in [CE03, Theorem 3.1 und Theorem 3.2]. Eindeutigkeit unter periodischen Kugelpackungen, falls eine solche Funktion existiert [CE03, Abschnitt 8].

Konsequenzen für die Nullstellen von f und $\widehat{f}$ als Motivation für die Konstruktion ([CE03, Figure 5], [Via17, S. 995])

Literatur: [CE03], Bücher zu Fourier-Analysis, z.B. [Gra14].

8. **Asymptotik schwach holomorpher Modulformen** (60 min) N.N.

Eine Modulform ist schwach holomorph, falls sie meromorph und holomorph überall außer bei ∞ ist. Prominentes Beispiel ist die j-Funktion, die Gitter klassifiziert. Wie wachsen die Koeffizienten schwach holomorpher Modulformen? Die Antwort ist nicht nur für die Abschätzungen im Beweis von Viazovska wichtig, sondern auch allgemein von Interesse, zum Beispiel: wie schnell wächste die Anzahl der Partitionen von n?

Keine der Quellen ist wirklich nutzerfreundlich, der Vortrag erfordert gründliches Einarbeiten!

Es gibt zwei Methoden, die/der Vortragende sollte sich für eine entscheiden:

i) Die Circle Method. Die Originalarbeit [RZ38] gibt den Zusammenhang für schwach holomorphe Modulformen. In [IK04, Abschnitt 20] ist die Circle Method gut erklärt und die Anwendunge auf Partitionen, aber für die Anwendung auf Modulformen wird die andere Quelle benötigt.

ii) Man schreibt die schwach holomorphe Modulform als Summe von Poincaré-Reihen und schätzt deren Wachstum ab. Das steht in [Bru02, Abschnitt 1.3]. [Die Kunst besteht darin, das auf den Fall der trivialen Darstellung statt der Weildarstellung zu spezialisieren und die Formeln dementsprechend zu vereinfachen.]

Als Nebenprodukt: Wachstumsverhalten von Besselfunktionen explizit angeben.

Literatur: [RZ38] oder [Bru02].

9. **Radialsymmetrische Eigenfunktionen I** (60 min) N.N.

Wir folgen [Coh17] und der Masterarbeit [Sli18] um die Motivation hinter der Kontruktion der magischen Funktion für lineare Optimierung zu verstehen. Die Details der folgenden Aufgabenliste ist in *Absprache mit den folgenden zwei Vorträgen* zu erledigen, sodass alle ungefähr gleich lang sind. Zum Vergleich ist zusätzlich ein Blick in die Originalarbeit [Via17] nötig.

Zu Beginn die Bedingungen (z.B. an die Nullstellen) wiederholen, die die magische Funktion für das E_8 bzw. das Leech-Gitter erfüllen muss. Auf dem Weg die 'magische Funktion' für lineare Optimierung zu finden, kann man ohne Einschränkung Eigenfunktionen für die Fouriertransformation im $+1$-Eigenraum und im -1-Eigenraum mit geeigneten Nullstellen suchen (warum?).

Zunächst den ersten Versuch mit Hilfe der Laplace-Transformation [Coh17, S. 20]) erzählen, dann den zweiten Versuch mit einem Sinus-Vorfaktor. Die analytische Fortsetzung mit Hilfe der Formel $4\sin^2(z) = 2 - 2\cos(2z) = 2 - e^{i2z} - e^{-i2z}$ hinschreiben. Jetzt kann man das Wegintegral zerlegen und die Fourier-Transformation durchführen. Wenn man die Terme vergleicht, sieht man die Funktiongleichungen, die die Funktion erfüllen muss [Sli18, S. 51-55] (Gleichungen (67)-(70) bzw. (82)-(85)). Klarstellen, dass die Überlegungen bis hier für alle Dimension n gelten.

Ab sofort konzentrieren wir uns auf Dimension 8. Zeigen, dass die Funktionalgleichung im $+1$-Eigenraum aus der Quasimodularität folgt, und dass man den Ansatz machen kann, dass die magische Funktion der Gestalt $\phi(t) = P(E_2, E_4, E_6)/\Delta$ ist.

Abschließend zeigen, dass Ähnliches für die -1-Eigenfunktion gilt ([Sli18, S. 61-62]).

Literatur: [Via17; Coh17], [Sli18].

10. **Radialsymmetrische Eigenfunktionen II** (60 min) N.N.

Der Vortrag setzt die Suche nach der magischen Funktion aus dem vorigen Vortrag fort.

Erzählen Sie, dass das oben genannte $P(E_2, E_4, E_6)$ eine Linearkombination von endlich vielen möglichen Quasimodulformen ist und wie man die Koeffizienten bestimmen kann [Sli18, S. 57-60]. (Die komplizierten Berechnungen können übersprungen werden.) Erzählen Sie das ähnliche Vorgehen für die -1-Eigenfunktion [Sli18, S. 62-65].

Dann ist noch zu zeigen, dass die konstruierten Eigenfunktionen wirklich Schwartz-Funktionen sind. Dazu ist zusammenzufassen, welche Eigenschaften die – nach so viel Motivation gefundenen – Eigenfunktion wirklich haben [Via17, Prop. 1-8]. Evtl. einige der Eigenschaften an den folgenden Vortrag abgeben.

Literatur: [Via17; Sli18].

11. **Die magische Funktion für das E_8-Gitter** (60 min) N.N.

Das Ziel ist ein Funktion zu finden, die der Cohen-Elkies-Optimierungsmethode genügt, also den Bedingungen [Via17, Theorem 3]. Die Funktion ist eine Linearkombination der Eigenfunktionen aus dem vorigen Vortrag.

Der Vortrag liefet Details zum Beweis von [Via17, Theorem 4]. Evtl. einige der Aussagen aus [Via17, Prop. 1-8] beweisen, vgl. voriger Vortrag. Plausibel machen, wie man die geforderten Eigenschaften der magischen Funktion als Kombination von Abschätzen und Ausrechnen mit Intervall-Arithmetik prüfen kann. Erklären warum die Fourier-Entwicklung bis zur 6ten Term schon reicht.

Literatur: [Via17; Sli18].

12. **Die magische Funktion für das Leech-Gitter** (60 min) N.N.

Der Beweis in [CKMRV17] für das Leech-Gitter folgt dem selben Schema wie der für das E_8-Gitter in [Via17]. Am Wichtigsten ist es zu erklären, welche Änderungen und Gleichheiten es in der Konstruktion von Eigenfunktionen im Vergleich zu der für das E_8-Gitter gibt [Sli18, S. 83-87]. Das soll motivieren, wieso die Autoren von [CKMRV17] am Ende von Abschnitt 2 und 3 jeweils sagen "we began with the Ansatz ...".

Mit den Vortragenden der Vorträge TODO absprechen.

Literatur: [Via17; CKMRV17; Sli18].

13. **Optional: Gerade unimodulare Gitter in Dimension 24** (60 min) N.N.

Es gibt genau 24 gerade unimodulare Gitter in Dimension 24 (Satz von Niemeyer). Neben der Tatsache, dass die optimale Kugelpackung Dimension 24 bekannt ist ist diese Dimension die erste wo die Klassifikationsfrage nicht ganz schnell geht (wie in Dimension 8 und 16) und die letzte, bei der es von Hand möglich ist. Dieses Klassifikationsproblem ist bekannt und beliebt, weil viele Teichniken und Konstruktionen zu Gitter hierbei verwendet werden.

Hintergrundhinweis, nicht für den Vortrag: Niemeyers Beweis basiert auf Knesers Methode der Nachbargitter. Das alles ist im Buch von Kneser [Kne02] vorgestellt. Der Beweis füllt fast das ganze Buch, da er frei aus allen Abschnitten "Quadratische Formen über verschiedenen Körpern und Ringen" importiert.

Direkter ist Venkovs Methode: Sie klassifiziert zunächst die von den Wurzeln erzeugten Untergitter. Danach bleibt zu untersuchen, welche unimodularen Gitter ein gegebenes Wurzelgitter enthalten können. Dies kann man in einem Vortrag erzählen:

Das Ziel ist, den [Ebe13, Abschnitt 3] zusamenzufassen. Erzählen Sie die Definitionen von sphärischen Polynomen, Theta-Funktionen mit spherischen Koeffizienten mit dem Ziel Corollary 3.3, (Klassifizierung der Wurzeln von einem geraden unimodularen Gitter) und Proposition 3.4. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Overlattice und Codes und fassen Sie den Rest dieses Abschnitts bis Corollary 3.7 und Niemeier's Satz zusammen.

Literatur: [Ebe13], [Kne02].

14. **Äußerst optional: Die Siegelsche Maßformel** (60 min) N.N.

    Die Siegelsche Maßformel [Kne02, Abschnitt X.35] sagt, dass die gewichtete Summe aller Gitter eines Geschlechts gleich einem (relative leicht berechenbaren) Ausdruck in lokalen Darstellungszahlen ist.

    Allein den Begriffe "Geschlechtertheorie", "Haarsche Maße" und "Darstellungszahlen" sinnvoll in einem Kurzvortrag unterzubringen, also die Aussage der Maßformel zu erklären und warum man damit (wenn man die Gitter bereits kennt) den Nachweis der Vollständigkeit der Liste erbringen kann, ist anspruchsvoll. *Es lohnt nur für jemand, der zu diesem Thema eine Bachelor- oder Masterarbeit schreiben will.*

    Literatur: [Kne02].

15. **Optional: Lineare Optimierung für höherdimensionale Gitter** (60 min) N.N.

    Ziel ist ein Überblick über Kugelpackungsresultate in höherer Dimension.

    Mit dem Ansatz linearer Optimierung kann man die zweitbeste bekannte Schranke alternativ beweisen, siehe [CE03, Abschnitt 6]. Der Beweis davon vollständig, evtl. ein Überblick über die beste bekannte Schranke für hohe Dimension.

    Literatur: [CE03, Abschnitt 6].

Literatur

[BGHZ08] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder und D. Zagier. *The 1-2-3 of modular forms.* Universitext. Lectures from the Summer School on Modular Forms and their Applications held in Nordfjordeid, June 2004, Edited by Kristian Ranestad. Springer-Verlag, Berlin, 2008, S. x+266.

[Bru02] J. H. Bruinier. *Borcherds products on O(2, l) and Chern classes of Heegner divisors.* Bd. 1780. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002, S. viii+152.

[Cas97] J. W. S. Cassels. *An introduction to the geometry of numbers.* Berlin [u.a.]: Springer, 1997.

[CE03] H. Cohn und N. Elkies. „New upper bounds on sphere packings. I“. In: *Ann. of Math. (2)* 157.2 (2003), S. 689–714.

[CKMRV17] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko und M. Viazovska. „The sphere packing problem in dimension 24“. In: *Ann. of Math. (2)* 185.3 (2017), S. 1017–1033.

[Coh17] H. Cohn. „A conceptual breakthrough in sphere packing“. In: *Notices Amer. Math. Soc.* 64.2 (2017), S. 102–115.

[Coh22] H. Cohn. *The work of Maryna Viazovska.* https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2022. 2022.

[CS93] J. H. Conway und N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups.* Second. Bd. 290. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, New York, 1993, S. xliv+679.

[Ebe13] W. Ebeling. *Lattices and codes.* Third Edition. Advanced Lectures in Mathematics. A course partially based on lectures by Friedrich Hirzebruch. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013, S. xvi+167.

[Gau31] C. F. Gauss. „Besprechung des Buchs von L. A. Seeber Üntersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen usw."." ger. In: *Göttingsche Gelehrte Anzeigen* (1831).

[Gra14] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis.* Third Edition. Bd. 249. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2014, S. xviii+638.

[Hal05] T. C. Hales. „A proof of the Kepler conjecture“. English. In: *Ann. Math. (2)* 162.3 (2005), S. 1065–1185.

[IK04] H. Iwaniec und E. Kowalski. *Analytic number theory.* Bd. 53. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004, S. xii+615.

[KK07] M. Koecher und A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen.* revised. Springer-Verlag, Berlin, 2007, S. viii+331.

[Kne02] M. Kneser. *Quadratische Formen.* Revised and edited in collaboration with Rudolf Scharlau. Springer-Verlag, Berlin, 2002, S. viii+164.

[Lás72] F. T. László. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin [u.a.]: Springer, 1972.

[RZ38] H. Rademacher und H. S. Zuckerman. „On the Fourier coefficients of certain modular forms of positive dimension“. In: *Ann. of Math. (2)* 39.2 (1938), S. 433–462.

[Sli18] A. Slipper. *Modular Magic.* https://www.math.harvard.edu/media/slipper.pdf. 2018.

[Via17] M. S. Viazovska. „The sphere packing problem in dimension 8“. In: *Ann. of Math. (2)* 185.3 (2017), S. 991–1015.