Vorsemesterkurs
Informatik
Übungsaufgaben

Tag 1a - Codierung und Bool'sche Algebra

Aufgabe 1: Binärzahlen

(a) Formen Sie die folgenden Binärzahlen in Dezimalzahlen um.

i) 101010_2
ii) 001011_2
iii) 110111_2
iv) 100110_2

(b) Formen Sie die folgenden Dezimalzahlen in Binärzahlen um.

i) 67_{10}
ii) 214_{10}
iii) 1011_{10}
iv) 39_{10}

Solution:

(a) i) $101010_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 2 = 42_{10}$

ii) $001011_2 = 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11_{10}$

iii) $110111_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 55_{10}$

iv) $100110_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 4 + 2 = 38_{10}$

(b) i) $67_{10} = 1000011_2$

$67 : 2$	$= 33$	Rest	1
$33 : 2$	$= 16$	Rest	1
$16 : 2$	$= 8$	Rest	0
$8 : 2$	$= 4$	Rest	0
$4 : 2$	$= 2$	Rest	0
$2 : 2$	$= 1$	Rest	0
$1 : 2$	$= 0$	Rest	1

ii) $214_{10} = 11010110_2$

$214 : 2$	$= 107$	Rest	0
$107 : 2$	$= 53$	Rest	1
$53 : 2$	$= 26$	Rest	1
$26 : 2$	$= 13$	Rest	0
$13 : 2$	$= 6$	Rest	1
$6 : 2$	$= 3$	Rest	0
$3 : 2$	$= 1$	Rest	1
$1 : 2$	$= 0$	Rest	1

iii) $1011_{10} = 1111110011_2$

$1011 : 2$	$= 505$	Rest	1
$505 : 2$	$= 252$	Rest	1
$252 : 2$	$= 126$	Rest	0
$126 : 2$	$= 63$	Rest	0
$63 : 2$	$= 31$	Rest	1
$31 : 2$	$= 15$	Rest	1
$15 : 2$	$= 7$	Rest	1
$7 : 2$	$= 3$	Rest	1
$3 : 2$	$= 1$	Rest	1
$1 : 2$	$= 0$	Rest	1

iv) $39_{10} = 100111_2$

$39 : 2$	$= 19$	Rest	1
$19 : 2$	$= 9$	Rest	1
$9 : 2$	$= 4$	Rest	1
$4 : 2$	$= 2$	Rest	0
$2 : 2$	$= 1$	Rest	0
$1 : 2$	$= 0$	Rest	1

Aufgabe 2: Rechenregeln für aussagenlogische Formeln

Machen Sie mithilfe von Wahrheitstabellen deutlich, dass folgende Gleichungen gelten:

(a) **Absorptionsgesetze**
- i) $a \vee (a \wedge b) = a$
- ii) $a \wedge (a \vee b) = a$

(b) **Distributivgesetze**
- i) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- ii) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(c) **Resolutionsregeln**
- i) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a$
- ii) $(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a$

(d) **De Morgan'sche Gesetze**
- i) $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$
- ii) $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

Solution:

(a) **Absorptionsgesetze**

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \vee (a \wedge b)$	$a \wedge (a \vee b)$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

(b) **Distributivgesetze**

i)

a	b	c	$b \wedge c$	$a \vee (b \wedge c)$	$a \vee b$	$a \vee c$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ii)

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(c) **Resolutionsregeln**

i)

a	b	$\overline{b}$	$a \wedge b$	$a \wedge \overline{b}$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b})$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1

ii)

a	b	$\overline{b}$	$a \vee b$	$a \vee \overline{b}$	$(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1

(d) **De Morgan'sche Gesetze**

i)

a	b	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} \vee \overline{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

ii)

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} \wedge \overline{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Aufgabe 3: Darstellung von Schaltfunktionen

Stellen Sie für folgende Schaltfunktionen Wahrheitstabellen auf:

(a) $f(a,b,c) = (a \wedge b) \vee ((a \vee c) \wedge (b \vee c))$

(b) $g_1(a,b,c) = (c \vee \overline{a}) \wedge (b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b)$

(c) $g_2(a,b,c) = (c \vee \overline{a}) \wedge ((b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b))$

(d) $h(a,b,c) = (b \vee c) \wedge (\overline{a \wedge b})$

Solution:

(a)

a	b	c	$a \wedge b$	$a \vee c$	$b \vee c$	$(a \vee c) \wedge (b \vee c)$	$f(a,b,c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(b)

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{c}$	$c \vee \overline{a}$	$b \wedge \overline{c}$	$a \wedge b$	$(c \vee \overline{a}) \wedge (b \wedge \overline{c})$	$g_1(a,b,c)$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

(c)

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{c}$	$c \vee \overline{a}$	$b \wedge \overline{c}$	$a \wedge b$	$((b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b))$	$g_2(a,b,c)$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1

(d)

a	b	c	$a \wedge b$	$\overline{(a \wedge b)}$	$b \vee c$	$h(a,b,c)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

Aufgabe 4: Bool'sche Algebra

(a) Formen Sie die folgenden Gleichungen durch wiederholtes Anwenden der De Morgan'schen Gesetze so um, dass Negationen nur noch über einzelnen Variablen stehen.
Beispiel: $\overline{\overline{(a \wedge b)} \vee c} = (\overline{\overline{a \wedge b}}) \wedge \overline{c} = (\overline{\overline{a} \vee \overline{b}}) \wedge \overline{c} = \overline{\overline{a}} \wedge \overline{\overline{b}} \wedge \overline{c} = a \wedge b \wedge \overline{c}$.

i) $\overline{(a \vee b)} \wedge \overline{(c \wedge \overline{d})}$

ii) $\overline{\overline{(a \vee b)} \vee \overline{(c \wedge \overline{d})}}$

(b) Formen Sie die folgenden Gleichungen durch wiederholtes Anwenden der Distibutivgesetze so um, dass Sie eine Ver-ODER-ung von UND-Termen erhalten.
Beispiel: $(a \vee b) \wedge (c \vee d) = ((a \vee b) \wedge c) \vee ((a \vee b) \wedge d) = ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \vee ((a \wedge d) \vee (b \wedge d)) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge d)$

i) $(a \wedge b) \vee ((c \vee d) \wedge (b \vee a))$

ii) $(b \vee d) \wedge (a \vee c)$

Solution:

(a) i)

$$
\begin{aligned}
\overline{(a \vee b)} \wedge \overline{(c \wedge \overline{d})} &= (\overline{a} \wedge \overline{b}) \wedge (\overline{c} \vee \overline{\overline{d}}) \\
&= (\overline{a} \wedge \overline{b}) \wedge (\overline{c} \vee d)
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{(a \vee b)} \vee \overline{(c \wedge \overline{d})}} &= \overline{\overline{(a \vee b)}} \wedge \overline{\overline{(c \wedge \overline{d})}} \\
&= \overline{(\overline{a} \wedge \overline{b})} \wedge \overline{(\overline{c} \vee \overline{\overline{d}})} \\
&= (\overline{\overline{a}} \vee \overline{\overline{b}}) \wedge (\overline{\overline{c}} \wedge \overline{\overline{\overline{d}}}) \\
&= (a \vee b) \wedge (c \wedge \overline{d})
\end{aligned}
$$

(b) i)

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee ((c \vee d) \wedge (b \vee a)) &= (a \wedge b) \vee ((c \vee d) \wedge b) \vee ((c \vee d) \wedge a) \\ &= (a \wedge b) \vee ((c \wedge b) \vee (b \wedge d)) \vee ((c \wedge a) \vee (d \wedge a)) \\ &= (a \wedge b) \vee (c \wedge b) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge a) \vee (a \wedge d)\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(b \vee d) \wedge (a \vee c) &= (b \wedge (a \vee c)) \vee (d \wedge (a \vee c)) \\ &= (a \wedge b) \vee (c \wedge b) \vee (a \wedge d) \vee (d \wedge c)\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Schaltungen

(a) Stellen Sie folgende Schaltfunktionen als Schaltung dar:

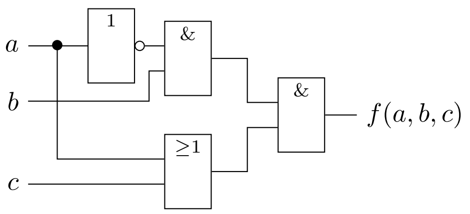
i) $g(a, b, c) = (a \vee b) \wedge c$

ii) $f(a, b, c, d) = (a \wedge b) \vee (c \vee d)$

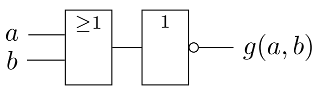
iii) $h(a, b, c, d) = ((a \wedge c) \vee \overline{b}) \wedge (c \vee \overline{d})$

(b) Geben Sie jeweils die Schaltfunktion zur Schaltung an.

i)

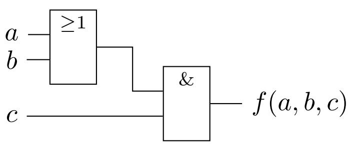


ii)

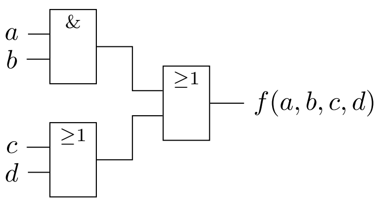


Solution:

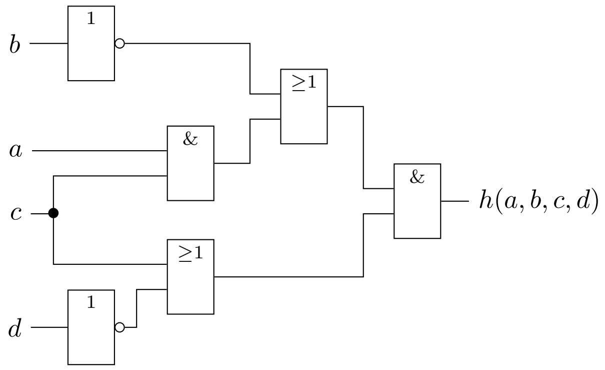
(a) i)



ii)



iii)



(b) i) $(\overline{a} \wedge b) \wedge (a \vee c)$

ii) $\overline{(a \vee b)}$

Viel Erfolg!