Numerik partieller Differentialgleichungen
Wintersemester 2022/23
PD Dr. Sarah Eberle

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

3. Übungsblatt (erschienen am 16.11.2022)

Aufgabe 3.1 (Theorieaufgabe)
Sei $g \in H^1(]-1,0[)$ und $h \in H^1(]0,1[)$. Wir definieren $f \in L^2(]-1,1[)$ durch

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in (-1,0), \\ h(x) & \text{für } x \in (0,1). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $f' \in \mathcal{D}'(]-1,1[)$ und zeigen Sie, dass $f \in H^1(]-1,1[)$ genau dann gilt, wenn $g(0) = h(0)$.

(b) Seien nun $g'' = h'' = 0$. Berechnen Sie $f'' \in \mathcal{D}'(]-1,1[)$. Wann gilt $f'' = 0$?

Aufgabe 3.2 (Theorieaufgabe)

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $A \cap K = \emptyset$. Zeigen Sie, dass

$$\inf_{x \in K, y \in A} \|x - y\| > 0.$$

Geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass die Aussage im Allgemeinen nicht für zwei abgeschlossene Mengen gilt.

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von Ω. Zeigen Sie dass ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert mit

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1,\ \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \Omega,\ \varphi(x) = 1\ \forall x \in A.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Faltung von Funktionen.

Aufgabe 3.3 (Theorieaufgabe)
Beweisen Sie Definition und Satz 2.27 der Vorlesung. Zeigen Sie dazu, dass der Spuroperator

$$\gamma_A : \ C^\infty([A,B]) \to \mathbb{R}, \quad \gamma_A u := u(A)$$

bezüglich der $H^1(]A,B[)$-Norm beschränkt ist, d.h. es existiert ein $C > 0$ mit

$$|\gamma_A u| \leq C \, \|u\|_{H^1(]A,B[)} .$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Hilfsfunktion $\varphi \in D^\infty([A,B])$ mit $\varphi(A) = 1, \varphi(B) = 0$ und ändern Sie mittels dieser

$$|u(B)|^2 - |u(A)|^2 = \int_A^B \partial_x(u(x)^2) \mathrm{d}x = 2 \int_A^B u(x) u'(x) \mathrm{d}x$$

geeignet ab.

Aufgabe 3.4 (Programmieraufgabe)

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Gebiete eine Funktion, welche zu einem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ den gerichteten Abstand des Punktes zum Rand des jeweiligen Gebietes bestimmt. Dabei soll der Abstand für Punkte innerhalb des Gebietes negatives und für Punkte außerhalb des Gebietes positives Vorzeichen haben.

- Ein Kreis Ω_1 mit Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ um den Punkt $c = (5, 4)$.
- Ein Rechteck $\Omega_2 := [0, 6] \times [0, 3]$.
- Das Quadrat $\Omega_3 := [4, 6] \times [3, 5]$ ohne den Kreis Ω_1.
- Die Vereinigung $\Omega_4 := \Omega_2 \cup (\Omega_3 \setminus \Omega_1)$.

Hinweis: Für den Einheitskreis gibt die Funktion $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1$ den gerichteten Abstand an.

(b) Installieren Sie das Paket `distmesh` von der Seite `http://persson.berkeley.edu/distmesh/` und verwenden Sie die darin enthaltene Funktion `distmesh2d` um für jedes Gebiet aus Teilaufgabe (a) eine Triangulierung gegeben durch P und T (vergleiche Aufgabenblatt 2) zu erstellen. Verwenden Sie die Funktion `plot_mesh` des 2. Übungsblattes um die verschiedenen Triangulierungen zu veranschaulichen.

Hinweis: Die Beispiele auf der Seite `http://persson.berkeley.edu/distmesh/` können hilfreich sein. Mit dem `MATLAB`-Befehl `addpath` können Sie außerdem einen Ordner dem aktuellen `MATLAB`-Pfad bekannt machen.

(c) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
I = Inhalt(p_1,p_2,p_3)
```

welche zu einem Dreieck, gegeben durch die Punkte $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, $p_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmt.

(d) Bestimmen Sie mit ihrer `Inhalt`-Funktion aus dem Aufgabenteil (c) den Inhalt der Gebiete aus Teilaufgabe (a) und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit den exakten Werten.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu den Aufgaben wird **keine** Abgabe verlangt.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 3 werden in der Übung am 30.11.2022 besprochen.