Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/22
7. November 2022

Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
M.Sc. Johannes Schwab
M.Sc. Jeonghoon So

Übungsblatt 03

Aufgabe 1

Sei K ein Körper mit höchstens abzählbar vielen Elementen. Zeigen Sie, dass der algebraische Abschluss $\overline{K}$ von K abzählbar unendlich viele Elemente hat.

Aufgabe 2

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung von Grad $[L : K] = n$. Gegeben Sei weiter $\alpha \in L$ und eine Menge von Isomorphismen $\sigma_j \colon L \longrightarrow L$, $j = 1, \ldots, n$, sodass $\sigma_j|_K = \mathrm{id}_K$ und $\sigma_j(\alpha) \neq \sigma_\ell(\alpha)$ für $j \neq \ell$. Zeigen Sie, dass $L = K(\alpha)$.

Aufgabe 3

Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

(i) Zeigen Sie, dass L ein Zerfällungskörper von $X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$ ist.

(ii) Bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$, und eine $\mathbb{Q}$-Basis von L.

(iii) Bestimmen Sie alle acht Elemente in

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(L) := \{\varphi : L \to L \text{ Körperautomorphismus } : \varphi|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\}.$$

Tipp: Bestimmen Sie wohin jeder Automorphismus die Nullstellen und $X^4 - 2$ and $X^2 + 1$ abbildet.

(iv) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i)$.
Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, welche der folgenden Polynome seperabel sind:

(a) $X^3 - X^2 + 1$ über $\mathbb{F}_3$.

(b) $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ über $\mathbb{Q}$.

(c) $X^6 - a$ über einem beliebigen Körper K mit $a \in K$.

Aufgabe 5

Sei L/K eine Körpererweiterung der Charakteristik $p > 0$ und $\alpha \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie, dass α seperabel ist genau dann, wenn $K(\alpha) = K(\alpha^p)$.

Tipp: ($\Leftarrow$) Angenommen $K(\alpha) = K(\alpha^p)$, dann gibt es ein $F \in K[X]$, sodass α eine Nullstelle von $F(X^p) - X$ ist. Wieso?

Abgabe bis Beginn der Vorlesung am **Montag, 14.11.2022**.