

2. Übungsblatt (erschienen am 02.11.2022)

Aufgabe 2.1 (Theorieaufgabe)

Berechnen Sie die (distributionelle) Ableitung $u' \in \mathcal{D}'(-1, 1[)$ von

$$u(x) := \begin{cases} -x^2/2 - x/6 + 1/3 & \text{für } x \in (-1, 0) \\ -x^2/4 - x/12 + 1/3 & \text{für } x \in (0, 1) \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass u die Differentialgleichung

$$-(k(x)u'(x))' = f(x) \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 0, u(1) = 0,$$

mit $f(x) := 1$ und

$$k(x) = 1 \quad \text{für } x \in (-1, 0), \quad k(x) = 2 \quad \text{für } x \in (0, 1)$$

löst.

Aufgabe 2.2 (Theorieaufgabe)

Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.17 (Rechenregeln für die Ableitung) der Vorlesung.

Aufgabe 2.3 (Theorieaufgabe)

Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.13 der Vorlesung:

Ist $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\partial_i f = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, dann ist f lokal konstant, d.h. zu jedem Punkt $x \in \Omega$, existiert eine Umgebung U und ein $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_U c \varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Warum ist es immer möglich, U als geeignetes mehrdimensionales Intervall $I =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$ zu wählen?
- Zeigen Sie, dass

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(I) \text{ mit } \int_{a_i}^{b_i} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_i = 0 \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\}.$$

- Verwenden Sie nun Funktionen $\psi_j \in \mathcal{D}(]a_j, b_j[)$, $j = 1, \dots, n$ mit $\int_{a_j}^{b_j} \psi_j(x_j) dx_j = 1$, um die Aussage für $U = I$ zu zeigen.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)

(a) Betrachten Sie ein beliebiges Rechteck $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$[P, T] = \text{gen_mesh}(a, b, c, d, m, n)$$

welche zu einem Rechteck, gegeben durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sowie $m, n \in \mathbb{N}$ eine Triangulierung des Rechteckes in $2nm$ viele, gleichgroße Dreiecke erzeugt, vergleiche Abbildung 1 für ein Beispiel. Dabei soll die Ausgabe $P \in \mathbb{R}^{(n+1)(m+1), 2}$ eine Matrix sein, welche in der i -ten Zeile die (x, y) -Koordinaten des i -ten Gitterpunktes enthält. $T \in \mathbb{R}^{2mn, 3}$ soll eine Matrix sein, welche in der j -ten Zeile die Indizes der drei, zum j -ten Dreieck gehörenden, Gitterpunkte enthält.



Abbildung 1: Beispielhafte Triangulierungen des Rechteckes $[0, 2] \times [0, 1]$ für $n = 4$ und $m = 2$.

(b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$\text{plot_mesh}(P, T)$$

die eine durch `gen_mesh` erzeugte Triangulierung visualisiert. Verwenden Sie dazu nicht die MATLAB-interne Funktion `triplot`.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu den Aufgaben wird **keine** Abgabe verlangt.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 2 werden in der Übung am 16.11.2022 besprochen.